IV GLAVA

4. TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

4.1. Definicije trigonometrijskih funkcija ma kog ugla

1363. Leva strana se transformiše na sledeći način:

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}}=\frac{|\sin\alpha|}{1+\cos\alpha},$$

izuzimajući slučaj kada je $\cos\alpha=-1$, tj. $\alpha=(2k+1)\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$. Sledi da je formula tačna pod uslovom $|\sin\alpha|=\sin\alpha$, tj. da ispunjava uslov $2k\pi\le\alpha\le(2k+1)\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

1364. $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\sqrt{\dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}+\sqrt{\dfrac{(1+\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}$

$$=\frac{|1-\cos\alpha|}{|\sin\alpha|}+\frac{|1+\cos\alpha|}{|\sin\alpha|}=\frac{2}{\sin\alpha}.$$

1365. Leva strana date formule može se napisati u obliku

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}-\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}$$

$$=\frac{|1+\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}+\frac{|1-\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}.$$

U slučaju $\alpha\neq 0$ tj. $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ data formula je tačna ako je

$$1+\sin\alpha>0,\quad 1-\sin\alpha>0\quad\text{i}\quad\cos\alpha>0,$$

tj. $2k\pi<\alpha<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$; $\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi<\alpha<2k\pi$ i $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi$, $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. Dakle,

$$\frac{|1+\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}-\frac{|1-\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\operatorname{tg}\alpha.$$

1366. Leva strana date jednakosti se transformiše na sledeći način:

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{|\sin\alpha-\cos\alpha|}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\\&=\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha,\end{aligned}$$

jer je $\sin\alpha-\cos\alpha>0$, pošto je $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

1368. Imamo niz identičnih transformacija:

$$\begin{aligned}&\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{1+2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha-1)}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{1+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}\\&\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\\&=\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1\right)}=\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha+1}.\end{aligned}$$

1369. Leva strana se transformiše na sledeći način:

$$\begin{aligned}&2\sin^6\alpha-2\sin^4\alpha+2\cos^6\alpha-2\cos^4\alpha+1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha\\&=-2\sin^4\alpha(1-2\sin^2\alpha)-2\cos^4\alpha(1-\cos^2\alpha)+1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha\\&=-2\sin^4\alpha\cos^2\alpha-2\cos^4\alpha\sin^2\alpha+1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha\\&=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha\\&=1-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=0.\end{aligned}$$

1370. Imamo sledeće identične transformacije:

$$\begin{aligned}&\frac{1-\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}-\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)}\cdot\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot(\sin\alpha-\cos\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}\\&=\frac{\sin\alpha\cos\alpha(1-\sin\alpha\cos\alpha)}{\cos\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)}\cdot\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{1-\sin\alpha\cos\alpha}=\sin\alpha.\end{aligned}$$

1371. Leva strana može se postupno transformisati ns sledeći način:

$$\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\frac{-(\sin^2\alpha-\sin^4\alpha+\cos^2\alpha-\cos^4\alpha)}{-(\sin^2\alpha-\sin^6\alpha+\cos^2\alpha-\cos^6\alpha)}$$
$$=\frac{\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha(1-\sin^4\alpha)+\cos^2\alpha(1-\cos^4\alpha)}$$
$$=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha\sin^2\alpha(1+\cos^4\alpha)}$$
$$=\frac{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha+1+\cos^2\alpha)}=\frac{2}{2+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2}{3},$$

što je trebalo dokazati.

1373. Iz pretpostavke sledi da je

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=a \quad \text{ili} \quad \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=a,$$

odavde $\cos\alpha=\dfrac{1}{a\sin\alpha}$. Ako se zameni ova vrednost za $\cos\alpha$ u

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

imamo $a^2\sin^4\alpha-a^2\sin^2\alpha+1=0$. Odavde sledi da je

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2a}}.$$

1374. a) Ako se prva jednačina kvadrira, a zatim stepenuje sa 3 imamo:

$$\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=m^2 \quad \text{i}$$
$$\sin^3 x-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)+\cos^3 x=m^3,$$
$$\text{ili } \sin x\cos x=\frac{m^2-1}{2} \ \text{ i } \ \sin^3 x+\cos^3 x+\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=m^3,$$

odnosno $k+3\dfrac{m^2-1}{2}-m=m^3 \Rightarrow 2k+3m^3-3m=2m^3 \Rightarrow m^3-3m+2k=0$;

b) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$; c) $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$.

1375. Iz

$$\sin^2 a+\sin^2\beta=1 \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\sin^2\beta=\cos^2\beta$$

kako su uglovi α i β oštri, to je $\sin\alpha>0$ i $\cos\beta>0$, pa je $\sin\alpha=\cos\beta$, tj. $\sin\alpha=\sin(90^\circ-\beta)$. Odavde sledi $\alpha=90^\circ-\beta$, $\alpha+\beta=90^\circ$, tj. trougao ABC je pravougli.

1376. Imamo niz transformacija:

$$\frac{\sin x+\cos x}{\cos^3 x}=\frac{\sin x}{\cos^3 x}+\frac{\cos x}{\cos^3 x}=\sin x\cdot\frac{1}{\cos^3 x}+\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$=\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}^2x)+1+\operatorname{tg}^2x=\operatorname{tg}^3x+\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x+1.$$

1377. Za egzistenciju treće jednačine neophodno je da $\cos x\neq 0$ i $\cos y\neq 0$. Zatim prve dve jednačine transformišemo u oblik

(1) $\qquad (a-1)\operatorname{tg}^2x=1-b,$

(2) $\qquad (b-1)\operatorname{tg}^2y=1-a.$

Pošto je $a=-1$, jer za $a=1$ imamo iz (1) $b=1$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom $b\neq a$.

Deobom (1) sa (2) $\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}y}\right)^2=\left(\dfrac{1-b}{1-a}\right)^2$.

Iz treće jednačine imamo $\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}y}=\dfrac{b^2}{a^2}$. Dakle $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2=\left(\dfrac{1-b}{1-a}\right)^2$.

Ako je $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1-b}{1-a}$, to je $a=b$, a to je nemoguće. Ako je $\dfrac{b}{a}=-\dfrac{1-b}{1-a}$, to je $a+b=2ab$, što je i trebalo dokazati.

1378. Množenjem prve jednačine sa $\sin\alpha$, druge sa $\cos\alpha$, imamo

$$1-\sin^2\alpha=m\sin\alpha,\quad 1-\cos^2\alpha=n\cos\alpha.$$

Odavde $m=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, $n=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$.

Dakle

$$(mn^2)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}=(\sin^3\alpha)^{\frac{2}{3}}=\sin^2\alpha;$$
$$(mn^2)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}=(\cos^3\alpha)^{\frac{2}{3}}=\cos^2\alpha.$$

Odavde imamo $(mn^2)^{\frac{2}{3}}+(m^2n)^{\frac{2}{3}}=\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=1$.

1379. Imamo

$$(\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x)^2=a^2,\quad \text{ili}\quad \operatorname{tg}^4x+2\operatorname{tg}^2x\cdot\operatorname{ctg}^2x+\operatorname{ctg}^4x=a^2.$$

Pošto je $\operatorname{tg}^4x+\operatorname{ctg}^4x=b$ i $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x=1$, to je $b+2=a^2$, odnosno $a^2-b=2$.

1380. Imamo

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow 1-\frac{1}{4}=2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{8}.$$

Zatim

$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1$$
$$\Rightarrow \sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2=1-2\cdot\frac{9}{64}=1-\frac{9}{32}=\frac{23}{32}.$$

1381. a) Iz date jednakosti imamo $\cos a=\dfrac{3-2\sin\alpha}{3}$. Zatim

$$\sin^2\alpha+\left(\frac{3-2\sin\alpha}{3}\right)^2=1,$$

odakle sledi da je

$$\sin\alpha=0\vee\sin\alpha=\frac{12}{13},\quad \text{a}\quad \cos\alpha=1\vee\cos\alpha=\frac{5}{13}.$$

b) $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$; c) $\sin\alpha=\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1382. Imamo da je $3\sin x=2(1-\sin^2 x)$, ili $2\sin^2 x+3\sin x-2=0$, odakle sledi da je $\sin x=-2$ (nemoguće), $\sin x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}$.

1383. Dati razlomak se transformiše u oblik $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\sin x}$. Pošto su oba činioca proizvoda pozitivna to je i njihov proizvod pozitivan.

1384. Iz prve dve date jednakosti dobijamo

$$x^2\cos^2\alpha+2xy\cos\alpha\sin\beta+y^2\sin^2\beta=a^2. \tag{1}$$
$$x^2\sin^2\beta-2xy\cos\alpha\sin\beta+y^2\cos^2\alpha=x^2\sin^2\beta=b^2. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) imamo

$$(x^2+y^2)\cdot(\cos^2\alpha+\sin^2\beta)=a^2+b^2. \tag{3}$$

Iz (3) i treće date jednakosti proizilazi

$$(x^2+y^2)\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\beta)=a^2+b^2+2ab,$$

odakle sledi $2(x^2+y^2)=(a+b)^2$, što je trebalo dokazati.

1385. Kako je

$$\cos^4 x+\sin^4 x=(\cos^2 x+\sin^2 x)-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x,$$
$$\begin{aligned}\sin^6 x+\cos^6 x&=(\cos^2 x+\sin^2 x)^3-3\cos^2 x\sin^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)\\&=1-3\sin^2 x\cos^2 x.\end{aligned}$$

Odavde izlazi

$$y=3(1-2\cos^2 x\sin^2 x)-2(1-3\cos^2 x\sin^2 x)=3-2=1,$$

tj. $y=\text{const}=1$.

1386. $A=2$ (uglovi 18° i 72°; 36° i 54° su komplementni).

1387. $x^2=\dfrac{a^2}{\cos\alpha}+2ab\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}+b^2\operatorname{tg}^2\alpha=a^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+2ab\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}+b^2\operatorname{tg}^2\alpha$ i

$$y^2=a^2\operatorname{tg}^2\alpha+2ab\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{b^2}{\cos^2\alpha}=a\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{2ab\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}+b^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha),$$

odakle

$$x^2-y^2=a^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+b\operatorname{tg}^2\alpha-a^2\operatorname{tg}^2\alpha-b^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha),$$

tj. $x^2-y^2=a^2-b^2$.

1388. Primenom jednakosti $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^2\alpha$ imamo

$$x^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}=(1+\operatorname{tg}^2)\cdot(1+\operatorname{tg}^2\alpha).$$
$$y^2=\frac{1}{\cos^2\beta}\cdot\operatorname{tg}^2\alpha=(1+\operatorname{tg}^2\beta)\cdot\operatorname{tg}^2\alpha,$$

odakle proizilazi

$$A=1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta-(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta\cdot\operatorname{tg}^2\alpha)-\operatorname{tg}^2\beta=1.$$

1389. $A=1$.

1390. Kvadriranjem datih jednakosti imamo

$$a^2=A^2\cos^2\alpha\cos^2\beta+B^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+C^2\sin^2\beta$$
$$-2AB\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta+2AC\sin\beta\cos\alpha\cos\beta-2BC\sin\alpha\sin\beta\cos\beta$$
$$b^2=A^2\cos^2\alpha\sin^2\beta+B^2\sin^2\alpha\sin^2\beta+C^2\cos^2\beta$$
$$-2AB\sin\alpha\sin^2\beta\cos\alpha-2AC\sin\beta\cos\beta\cos\alpha+2BC\sin\alpha\sin\beta\cos\beta,$$
$$c^2=A^2\sin^2\alpha+2AB\sin\alpha\cos\alpha+B^2\cos^2\alpha.$$

Odavde imamo (sabiranjem)

$$a^2+b^2+c^2=A^2(\cos^2\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+\sin^2\alpha)$$
$$+B^2(\sin^2\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+\cos^2\alpha)+C^2(\sin^2\beta+\sin^2\beta)$$
$$-2AB\sin\alpha\cos\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta-1).$$

Koeficijenti uz A^2, B^2, C^2 su očigledno jednaki jedinici a uz $2AB$ jednaki nuli, pa je $a^2+b^2+c^2=A^2+B^2+C^2$.

1391. Pretpostavka se može napisati u obliku

$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}-\frac{1}{a+b}=0,\quad \text{ili}\quad \frac{(1-\cos^2 x)^2}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}-\frac{1}{a+b}=0$$
$$\Rightarrow\ (a+b)\cos^4 x-2b\cos^2 x+\frac{b^2}{a+b}=0.$$

Odavde sledi $\cos^2 x=\dfrac{b}{a+b}$, a $\sin^2 x=\dfrac{a}{a+b}$, pa je $\cos^8 x=\dfrac{b^4}{(a+b)^4}$, a $\sin^8 x=\dfrac{a^4}{(a+b)^4}$.

Dakle,

$$\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\frac{a^4}{a^3(a+b)^4}+\frac{b^4}{b^3(a+b)^4}$$
$$=\frac{a}{(a+b)^4}+\frac{b}{(a+b)^4}=\frac{a+b}{(a+b)^4}=\frac{1}{(a+b)^3},$$

što je i trebalo dokazati.

1392. Posle očiglednih transformacija, leva strana formule se transformiše u oblik

$$\frac{|\sin\alpha-\cos\alpha|}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$
$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha,$$

za $\sin\alpha-\cos\alpha>0$, tj. $2k\pi+\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{5\pi}{4}+2\pi$.

1393. Pošto je $0<\alpha<\pi\ \Rightarrow\ -1<\cos\alpha<1$, to je

$$(1)\quad \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}<1\ \Rightarrow\ |b-c|<a,\qquad (2)\quad \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}<1\ \Rightarrow\ b+c>a.$$

Iz (1) i (2) je $|b-c|<a<b+c$.

1394. Pošto je α oštar ugao to:

$$|\sin\alpha+\cos\alpha|=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}>1.$$

Dakle $\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

1395. $0^\circ\le\alpha\le45^\circ$, $315^\circ\le\alpha\le360^\circ$.

1396. $0^\circ\le\alpha\le60^\circ$, $90^\circ<\alpha\le240^\circ$, $270^\circ<\alpha\le360^\circ$.

1397. $0^\circ\le\alpha\le225^\circ$ i $315^\circ\le\alpha\le360^\circ$.

1398. $30^\circ<\alpha<180^\circ$, $210^\circ\le\alpha\le360^\circ$.

1399. $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}\le x\le\pi$, $\pi\le x\le\dfrac{5\pi}{2}$, $\dfrac{7\pi}{4}\le x\le2\pi$.

1400. $0\le x\le2\pi$. **1401.** $\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{5\pi}{6}$.

1402. $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{3\pi}{4}<x<\dfrac{5\pi}{4}$ i $\dfrac{7\pi}{4}\le x\le2\pi$. **1413.** -1.

4.2. Svođenje trigonometrijskih funkcija ma kog ugla na trigonometrijske funkcije oštrog ugla

1414. a) $\sin\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$, $\cos\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt3}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{3}=\sqrt3$, $\operatorname{ctg}\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{\sqrt3}{3}$;

b) $\sin\dfrac{7\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt2}{2}$, $\cos\dfrac{7\pi}{4}=\dfrac{\sqrt2}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4}=-1$, $\operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{4}=-1$;

c) $\sin\dfrac{20\pi}{3}=\dfrac{\sqrt3}{2}$, $\cos\dfrac{20\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{20\pi}{3}=-\sqrt3$, $\operatorname{ctg}\dfrac{20\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt3}{3}$.

1415. 1. **1416.** 1. **1417.** $-\operatorname{ctg}^4\alpha$. **1418.** 1.

1419. $\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

1423. Imamo

$$\frac{\sin^2 2\alpha+\operatorname{tg}^2 2\alpha+1}{\cos^2 2\alpha+\operatorname{ctg}^2 2\alpha+1}=\frac{\sin^2 2\alpha+\dfrac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}+1}{\cos^2 2\alpha+\dfrac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}+1}$$
$$=\frac{\sin^2 2\alpha(\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha)}{\cos^2 2\alpha(\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha)}=\operatorname{tg}^2 2\alpha.$$

1424. Leva strana datog identiteta identički je jednaka izrazu

$$\frac{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha+\sin^2\alpha}{\cos\alpha(4\sin\alpha+1)}=\frac{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}$$
$$=\frac{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{2}{\cos^3\alpha}=2\sec^3\alpha.$$

1427. a) $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$; $\alpha\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$; b) 0.

1428. $\frac{1}{8}$. **1429.** $-\sqrt{3}$. **1430.** 1. **1431.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1432. $\sqrt{2}$. **1433.** $\frac{1}{\sin\alpha-\cos\alpha}$. **1434.** $\sin\alpha+\cos\alpha$.

1435. Iz pretpostavke imamo $\alpha=k\pi-\beta-\gamma-\delta$, pa se leva strana može transformisati u oblik

$$\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\delta)=\sin(k\pi-\beta-\gamma-\delta+\gamma)\sin(k\pi-\beta-\gamma-\delta+\delta)$$
$$=\sin(\beta+\delta)\sin(\beta+\gamma).$$

1436. Analogno prethodnom zadatku. **1437.** 3.

1438. -2. **1439.** -3. **1440.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1441.** -1.

4.3. Adicione formule

4.3.1. Trigonometrijske funkcije zbira i razlike uglova

1442. Uputstvo: $75^\circ=45^\circ+30^\circ$, $105^\circ=60^\circ+45^\circ$, $15^\circ=45^\circ-30^\circ$.

a) $\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$, $\cos 75^\circ=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$, $\operatorname{tg} 75^\circ=2+\sqrt{3}$.

b) $\sin 105^\circ=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$, $\cos 105^\circ\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$, $\operatorname{tg} 105^\circ=\sqrt{3}-2$.

c) $\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$, $\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$, $\operatorname{tg} 15^\circ=2-\sqrt{3}$.

1443. $\sin(\alpha+\beta)=\frac{33}{65}$. **1444.** $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{117}{125}$.

1445. $\cos(\alpha+\beta)=\frac{416}{425}$. **1446.** $-\frac{56}{125}$. **1447.** $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$.

1448. $-\frac{1}{7}$. **1449.** $\frac{3}{5}$. **1450.** $-\frac{16}{65}$.

1451. Primenom obrasca $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$, dati izraz postaje

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)=\cos 2\alpha.$$

1452. Analogno prethodnom zadatku dati izraz postaje

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{4\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

1453. $\sin x$.

1454. Pošto je $\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha$, onda je

$$(1+\operatorname{tg}\alpha)\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)=(1+\operatorname{tg}\alpha)\left(1+\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}\right)=(1+\operatorname{tg}\alpha)$$

1456. $\cos 2\alpha$. **1458.** $\frac{1}{7}$. **1459.** $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

1461. Zamenom datih vrednosti za $\operatorname{ctg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\beta$ u obrazac

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$$

dobija se da je

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=-1\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}.$$

1462. Date vrednosti zameniti u obrazac $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

4.3.2. Trigonometrijske funkcije dvostrukih uglova

1463. $\sin\frac{2\pi}{3}=2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1464. Ako se primene formule tangensa zbira i razlike dva ugla imamo

$$\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)-\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=2\operatorname{tg}2\alpha=6.$$

1465. a) $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{24}{7}$;
b) $\sin 2\alpha = -\frac{120}{69}$, $\cos 2\alpha = -\frac{119}{169}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{120}{119}$;
c) $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}$.

1466. a) $\sin x = \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; b) $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$;
c) $\sin 3x = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$; d) $\sin(x+y) = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$.

1467. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

1468. $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1469. a) $\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}$; b) $\frac{1}{2\cos 55^\circ}$; c) $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}}$; d) $\frac{1}{\cos 5\alpha}$.

1479. a) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; b) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

1480. a) $\sin 4x = 4\sin x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)$;
b) $\cos 4x = \sin^4 x + \cos^4 x - 6\sin^2 x\cos^2 x$.
c) $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

4.3.3. Trigonometrijske funkcije poluuglova

1481. Primenom vrednosti trigonometrijskih funkcija poluuglova imamo:

a) $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$,
$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$;

b) $\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$,
$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$;

c) $\sin\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\cos\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

d) $\sin\frac{\pi}{24} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, $\cos\frac{\pi}{24} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

1482. a) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{3}$;
b) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{-5\sqrt{34}}{34}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{5}$;
c) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

1484. a) 1; b) 1; c) 2. **1485.** a) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; b) $\operatorname{ctg}\alpha$.

1486. a) $2\sin^2 20^\circ$; b) $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; c) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$;

1487. a) $\sin 2\alpha$; b) $\sin 2\alpha$; c) 1.

1494. a) Kako je $\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{1} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}$, posle skraćivanja sa $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ dobija se dati identitet;

b) slično pod a) $\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}$, itd.

1495. Primeniti formule $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ i $\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

1496. $\frac{1}{7}$.

1497. 1° Ako je $\operatorname{tg} 2\alpha > 0$, $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$, onda je

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2}-1}{2\sqrt{1+a^2}}}, \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2}+1}{2\sqrt{1+a^2}}}.$$

2° Ako je $\pi < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\cos 2\alpha < 0$, tada je

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2}+1}{2\sqrt{1+a^2}}}, \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2}-1}{2\sqrt{1+a^2}}}.$$

1499. a) 4; b) 0,5; c) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$; d) $2\sqrt{3}$.

4.3.4. Transformacija zbira i razlike trigonometrijskih funkcija u proizvod i obrnuto

1500. Transformisati date zbirove i razlike u proizvod

a) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$; b) $-\sqrt{2-\sqrt{3}}$; c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; d) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

1501. a) Transformisati dati proizvod u zbir, tj.:

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ \cdot \cos 75^\circ &= \frac{1}{2}(\sin(15^\circ + 75^\circ) + \sin(15^\circ - 75^\circ))\\ &= \frac{1}{2}(\sin 90^\circ + \sin(-60^\circ)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4};\end{aligned}$$

b) 0,25.

1503. a) 1; b) $\sqrt{3}\cdot\cos 10^\circ$; c) $\sin 8\alpha \sin 2\alpha$.

1504. $2\sin\alpha\cos 4\alpha$. $\cos 10^\circ$. **1506.** $4\sin 27^\circ \cos 5^\circ \cos 2^\circ$.

1507. $4\sin 31^\circ \cos 5^\circ \cos 1^\circ$. **1508.** a) $2\sqrt{3}$; b) $-\sqrt{2}$; c) $\sqrt{2}$.

1509. a) $1 - \sin\alpha = \sin 90^\circ - \sin\alpha = 2\sin\dfrac{45^\circ - \alpha}{2}\cos\dfrac{45^\circ + \alpha}{2}$;

b) $-4\sin\dfrac{45^\circ + \alpha}{2}\sin\dfrac{45^\circ - \alpha}{2}$; c) $-4\sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha)$;

d) $4\sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha)$.

1511. a) $\cos(\alpha - 45^\circ)$; b) $\sin(45^\circ - \alpha)$. **1513.** $\alpha + \beta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.3.5. Kombinovani zadaci iz adicionih formula

1514. Dokazati da je $\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = 1$, odakle sledi tvrđenje.

1515. Dati izraz se transformiše u oblik

$$\begin{aligned}&4\cos\alpha\cos\varphi(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi) - 2(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi)^2 - \cos 2\varphi\\ &= 4\cos^2\alpha\cos^2\varphi + 4\sin\alpha\sin\varphi\cos\alpha\cos\varphi - 2\cos^2\alpha\cos^2\varphi\\ &\quad - 4\sin\alpha\sin\varphi\cos\alpha\cos\varphi - 2\sin^2\alpha\sin^2\varphi - \cos^2\varphi + \cos^2\varphi\\ &= \sin^2\varphi - 2\sin^2\alpha\sin^2\varphi - \cos^2\varphi + 2\cos^2\varphi\cos^2\alpha\\ &= \sin^2\varphi(1 - 2\sin^2\alpha) + \cos^2\varphi(2\cos^2\alpha - 1)\\ &= \sin^2\varphi(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \cos^2\varphi(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\\ &= \cos 2\alpha(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \cos 2\alpha.\end{aligned}$$

1516. $\cos^2\alpha$. **1517.** $\sin^2\alpha$.

1518. Dati izraz je identički jednak 1, tj. ne zavisi od x i y.

1519. Posle primene adicionih formula dati izraz postaje

$$\begin{aligned}&2\sin^2 a\cos^2 x + 2\cos^2 a\sin^2 x + 2\sin^2 a\cos^2 x\cos 2a - 2\sin^2 x\cos^2 x\cos 2x\\ &= 2\sin^2 a\cos^2 x(1 + \cos 2a) + 2\cos^2 a\sin^2 x(1 - \cos 2a)\\ &\quad +4\sin^2 a\cos^2 x\cos^2 a + 4\cos^2 a\sin^2 x\sin^2 a\\ &= 4\sin^2 a\cos^2 a(\cos^2 x + \sin^2 x) = (2\sin a\cos a)^2 = \sin^2 2a.\end{aligned}$$

1520. $\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin^2 x\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

1521. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Leva strana datog identiteta svodi se na $\sin 3x$.

1522. $\sin 5x = \sin(3x + 2x) = \sin 3x\cos 2x + \cos 3x\sin 2x$.

Kako je $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ i $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, posle očiglednih transformacija dobija se da je

$$\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x.$$

1523. $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$.

1524. $\operatorname{tg} 3x = \dfrac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}$.

1525. Izraz S, s obzirom na prethodni zadatak postaje

$$S = 3\,\frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} 3x.$$

1526. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \operatorname{tg} x\,\dfrac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x}\cdot\dfrac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x}$
$= \dfrac{\operatorname{tg} x(3 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} 3x$, na osnovu prethodnog zadatka.

1527. Leva strana se može transformisati u oblik

$$\begin{aligned}\frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} &= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}\\ \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{\sin\alpha + \cos\alpha} &= \sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right).\end{aligned}$$

1528. 0,96. **1529.** $1-p^2$. **1530.** $-\dfrac{22}{9}$. **1531.** 2.

1532. $-\dfrac{50}{7}$. **1533.** a) $-\dfrac{3}{5}$; b) $\dfrac{4}{5}$.

1534. Iz date jednačine izlazi da je $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$ ili $\operatorname{tg}\alpha=3$. Vrednost $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$ je za $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{5\pi}{4}\right)$, a vrednost $\operatorname{tg}\alpha=3$ je za $a\in\left(\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}\right)$, pa je tražena vrednost za $\sin 2\alpha$: a) $\dfrac{4}{5}$; $b)\dfrac{3}{5}$.

1535. Dati izraz transformisati u oblik $\dfrac{2\operatorname{tg}2\alpha-3}{4\operatorname{tg}2\alpha+5}$; kako je $\operatorname{tg}2\alpha=-\dfrac{3}{4}$, vrednost datog izraza je $-\dfrac{9}{4}$.

1536. Data jednakost se može transformisati na ovaj način:

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}=\frac{p}{q},$$

a posle skraćivanja razlomka na levoj strani, sa $\sin\alpha\sin\beta$, imamo

$$\frac{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{p}{q}\Rightarrow\operatorname{ctg}\beta=\frac{p+q}{p-q}\cdot\operatorname{ctg}\alpha.$$

1537. $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{q-p}{q+p}\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

1538. $\sin 2\alpha=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}$; $\cos 2\alpha=\dfrac{q^2-p^2}{q^2+p^2}$; $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2pq}{q^2-p^2}$.

1539. Dati izraz se transformiše na sledeći način:

$$\frac{1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha}==\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\dfrac{1-m^2}{1+m^2}}{1+\dfrac{2m}{1+m^2}}=\frac{1-m^2}{(1+m)^2}=\frac{1-m}{1+m}.$$

1540. Posle jednostavnih transformacija dati izraz se svodi na $\sin\alpha\cos\alpha$. Kvadriranjem pretpostavke dobija se

$$1+2\sin\alpha\cos\alpha=m^2\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{m^2-1}{2}.$$

Prema tome,

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}=\sin\alpha\cos\alpha=\frac{m^2-1}{2}.$$

1541. Iz sistema:

$$\sin x+\cos x=\frac{1}{5}\wedge\sin^2x+\cos^2x=1\Rightarrow\cos x=\frac{4}{5}\quad\text{ili}\quad\cos x=-\frac{3}{5}.$$

Zamenom ovih vrednosti u obrazac $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ dobija se da je $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\pm2$ ili $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\pm\dfrac{1}{3}$.

1542. Primenom obrasca za tangens dvostrukog ugla imamo:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2y&=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}+\frac{2\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}^2y}\\&=\frac{2(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y)(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y)}{1-((\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y)^2-2\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y)+\operatorname{tg}^2x\cdot\operatorname{tg}^2y}\\&=\frac{2a(1-b)}{1-(a^2-2b)+b^2}=\frac{2a(1-b)}{(1+b)^2-a^2}.\end{aligned}$$

1543. Date jednakosti mogu se napisati u obliku

$$\sin\varphi(b\cos\alpha-a\cos\beta)=\cos\varphi(b\sin\alpha-a\sin\beta),\tag{1}$$

$$\sin\varphi(d\sin\alpha-c\sin\beta)=\cos\varphi(c\cos\beta-d\cos\alpha).\tag{2}$$

Deljenjem (1) i (2) i svọenjem dobijene jednakosti na najmanji zajednički sadržalac imamo

$$(b\cos\alpha-a\cos\beta)(c\cos\beta-d\cos\alpha)=(b\sin\alpha-a\sin\beta)(d\sin\alpha-c\sin\beta),$$

odakle sledi

$$\begin{aligned}&bc\cos\alpha\cos\beta-ac\cos^2\beta-bd\cos^2a+ad\cos\alpha\cos\beta\\&\qquad=bd\sin^2\alpha-ad\sin\alpha\sin\beta-bc\sin\alpha\sin\beta+ac\sin^2\beta,\end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned}(bc+ad)\cos\alpha\cos\beta+(bc+ad)\sin\alpha\sin\beta&=bd+ac,\\(bc+ad)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)&=bd+ac,\\(bc+ad)\cos(\alpha-\beta)&=ac+bd;\end{aligned}$$

dakle $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{ac+bd}{bc+ad}$.

1544. Kako je

$$p=-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=-\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\quad\text{i}\quad q=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta,$$

dati izraz postaje

$$\begin{aligned}
\sin^2(\alpha+\beta) &- \frac{\sin^2(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos^2(\alpha+\beta)\\
&= \sin^2(\alpha+\beta)\left(1-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\right) + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos^2(\alpha+\beta)\\
&= \frac{\sin^2(\alpha+\beta)(\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\\
&\qquad + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos^2(\alpha+\beta)\\
&= \sin^2(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos^2(\alpha+\beta)\\
&= \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\big(\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)\big) = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = q.
\end{aligned}$$

Dakle, dati izraz ima vrednost q.

1545. Kako je

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

i kako je $|\cos a| \le 1$ i $|\cos b| \le 1$, dobija se

$$|\sin(a+b)| \le |\sin a\cos b + \cos a\sin b| \le |\sin a| + |\sin b|.$$

1546. Napišimo datu jednakost u obliku

$$\begin{aligned}
\cos x &= a\sqrt{(\cos x-\sin x)^2} + b\sqrt{(\cos x+\sin x)^2}\\
&= a|\cos x-\sin x| + b|\cos x+\sin x|.
\end{aligned}$$

Kako za $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$ važe nejednakosti $\cos x - \sin x > 0$ i $\cos x + \sin x < 0$, dobijamo

$$\cos x = a(\cos x-\sin x) - b(\cos x+\sin x) = (a-b)\cdot\cos x - (a-b)\cdot\sin x,$$

odakle je $a-b=1 \wedge a+b=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$.

1547. S obzirom da je

$$\begin{aligned}
\sin(x+y)\cdot\sin(x-y) &= \frac{1}{2}\Big(\cos\big((x+y)-(x-y)\big) - \cos\big((x+y)+(x-y)\big)\Big)\\
&= \frac{1}{2}(\cos 2y - \cos 2x) = (1-2\sin^2 y - 1 + 2\sin^2 x)\\
&= \sin^2 x - \sin^2 y = (\sin x + \sin y)\cdot(\sin x - \sin y),
\end{aligned}$$

data jednakost je identitet.

1548. Leva strana može se napisati u obliku

$$\begin{aligned}
&\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)\right)\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)\right)\\
&= 2\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Dakle, data jednakost je identitet.

1549. Leva strana identiteta može se identički transformisati postupno na ovaj način:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos^3 x}{\cos x} - \frac{\cos 6x}{\cos 2x} &= \frac{\cos x\cos 2x - \sin x\sin 2x}{\cos x} - \frac{\cos 2x\cos 4x - \sin 2x\sin 4x}{\cos 2x}\\
&= \cos 2x - \cos 4x + \frac{\sin 2x\sin 4x}{\cos 2x} - \frac{\sin x\sin 2x}{\cos x}\\
&= \cos 2x - \cos 4x + 2\sin^2 2x - 2\sin^2 x\\
&= \cos 2x - \cos 4x + 1 - \cos 4x - (1-\cos 2x)\\
&= 2(\cos 2x - \cos 4x),
\end{aligned}$$

čime je dokaz završen.

1550. Leva strana identiteta postaje

$$\begin{aligned}
2+2\cos\alpha\cdot\cos\beta+2\sin\alpha\cdot\sin\beta &= 2(1+\cos\alpha\cdot\cos\beta+2\sin\alpha\cdot\sin\beta)\\
&= 2(1+\cos(\alpha-\beta)) = 2\cdot 2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}.
\end{aligned}$$

1552. Leva strana identiteta se nizom identičnih transformacija svodi na desnu:

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)\\
&= (\sin\alpha+\sin\beta)+(\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma))\\
&= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos\frac{\gamma+\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\alpha-\beta-\gamma}{2}\\
&= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\\
&= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)\\
&= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

1553. Analogno prethodnom zadatku.

1554. Leva strana identiteta nizom identičnih transformacija svodi se na desnu:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}-\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}\\
&=\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\\
&\qquad-\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\\
&=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\\
&\qquad-\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\\
&=\frac{\sin\gamma(\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\\
&=\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.
\end{aligned}$$

1555. Leva strana identičkim transformacijama svodi se na desnu na sledeći način:

$$\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\frac{\sin2\alpha\cos2\alpha}{2}=\frac{\sin4\alpha}{4}.$$

1556. Leva strana postaje:

$$\begin{aligned}
&\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\\
&=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta-2\sin^2\alpha\sin^2\beta\\
&=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)+\sin^2\beta(1-\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta\\
&=(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)^2=\sin^2(\alpha+\beta),
\end{aligned}$$

čime je dokaz završen.

1557. Leva strana može se napisati u obliku

$$\begin{aligned}
\frac{(1+\cos2\alpha)+(\cos3\alpha+\cos\alpha)}{1+\cos2\alpha+\cos\alpha-1}&=\frac{2\cos^2\alpha+2\cos2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos2\alpha}\\
&=\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\cos2\alpha)}{\cos\alpha+\cos2\alpha}=2\cos\alpha.
\end{aligned}$$

čime je dokaz završen.

1558. Ako se iskoristi pretpostavka, izraz A se svodi na sledeći način:

$$\begin{aligned}
A&=(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)\\
&=\frac{(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)(1-\sin^2\gamma)}{(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta)(1+\sin\gamma)}=\frac{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta\cdot\cos^2\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\\
&=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.
\end{aligned}$$

1559. Iz datih jednakosti sledi da je:

$$\sin2\beta=\frac{3}{2}\sin2\alpha,\quad 3\sin^2\alpha=1-2\sin^2\beta=\cos2\beta,$$

pa je

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+2\beta)=\cos\alpha\cos2\beta-\sin\alpha\sin2\beta=\cos\alpha,\\
3\sin^2\alpha-\frac{3}{2}\sin\alpha\sin2\alpha=0,
\end{aligned}$$

tj. $\cos(\alpha+2\beta)=0\ \Rightarrow\ \alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$, čime je dokaz završen.

1560. Kako je $\sin(2\alpha+\beta)=5\sin\beta$, imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\alpha}&=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}=\frac{\frac{1}{2}\big(\sin(2\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta-\alpha)\big)}{\frac{1}{2}\big(\sin(2\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\alpha-\beta)\big)}\\
&=\frac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta}=\frac{5\sin\beta+\sin\beta}{5\sin\beta-\sin\beta}=\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

1561. Kako je $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$, imamo

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\pi-(\alpha+\beta))\\
&\qquad=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\
&\qquad=\sin\alpha(1+\cos\beta)+\sin\beta(1+\cos\alpha)\\
&\qquad=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot2\cos^2\frac{\beta}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot2\cos^2\frac{\alpha}{2}\\
&\qquad=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\\
&\qquad=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

1562. Analogno prethodnom zadatku.

1563. Pošto je $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ i ako dodamo neutralni element $(1-1)$ levoj strani, imamo:

$$\begin{aligned}
&1+\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)-1\\
&=1+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-1+\cos(\alpha+\beta)\\
&=1+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\\
&=1+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\
&=1+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(-2\sin\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}}{2}\sin\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}\right)\\
&=1+4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(-\frac{\beta}{2}\right)=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

1564. Leva strana, s obzirom da je $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$, svodi se na desnu:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\\
&=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\left(1-\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\right)=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\left(\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-1}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\right)\\
&=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}(-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)(-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)\\
&=-\operatorname{tg}(\pi-\gamma)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.
\end{aligned}$$

1565. Leva strana identiteta, s obzirom na $\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$, može se transformisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}&=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\\
&=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}\\
&=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\cdot\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}=1.
\end{aligned}$$

1566. Pretpostavka $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ može se napisati u obliku

$$2\gamma=2\pi-(2\alpha+2\beta),$$

a leva strana date jednakosti se transformiše na ovaj način:

$$\begin{aligned}
\sin2\alpha+\sin2\beta-\sin(2\alpha+2\beta)&=\sin2\alpha+\sin2\beta-\sin2\alpha\cos2\beta-\sin2\alpha\cos2\beta\\
&=\sin2\alpha(1-\cos2\beta)+\sin2\beta(1-\cos2\alpha)\\
&=2\sin\alpha\cos\alpha\cdot2\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cdot2\cos^2\alpha\\
&=4\sin\alpha\sin\beta(2\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\\
&=4\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.
\end{aligned}$$

1567. Iz pretpostavke imamo $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$, pa se leva strana date jednakosti svodi na:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha+\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}\\
&=\frac{\sin\alpha(1+\cos\beta)+\sin\beta(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1-\cos\beta)+\sin\beta(1-\cos\alpha)}\\
&=\frac{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}+4\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}+4\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}\\
&=\frac{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.
\end{aligned}$$

1568. Pretpostavka $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ može se napisati u obliku

$$3\gamma=3\pi-(3\alpha+3\beta),$$

pa se leva strana svodi na:

$$\begin{aligned}
\sin3\alpha+\sin3\beta+\sin(3\pi-(3\alpha+3\beta))&=\sin3\alpha+\sin3\beta+\sin(3\alpha+3\beta);\\
&=\sin3\alpha+\sin3\beta+\sin(3\alpha+3\beta)\\
&=\sin3\alpha(1+\cos3\beta)+\sin3\beta(1+\cos3\alpha)\\
&=4\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}\cos^2\frac{3\beta}{2}+4\sin\frac{3\beta}{2}\cos\frac{3\beta}{2}\cos^2\frac{3\alpha}{2}
\end{aligned}$$

$$= 4\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\beta}{2}\left(\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\beta}{2} + \cos\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{3\beta}{2}\right)$$
$$= 4\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\beta}{2}\sin\left(\frac{3\alpha}{2} + \frac{3\beta}{2}\right) = -4\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\beta}{2}\cos\frac{3\gamma}{2},$$

jer je $\frac{3\alpha}{2} + \frac{3\beta}{2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{3\gamma}{2}$. Time je dokaz završen.

1569. Analogno prethodnom zadatku.

1570. Kako je $\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta)$, imamo:

$$\begin{aligned}
&\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(180^\circ - (\alpha+\beta))\\
&= \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta\\
&+ \cos^2\alpha\sin^2\beta + 2\cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta\\
&= \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta\\
&+ \cos^2\alpha\cos^2\beta = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\beta(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\\
&+ \cos^2\alpha(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\beta = 2.
\end{aligned}$$

1571. Smenom $\alpha = \beta + \gamma$, leva strana se transformiše u:

$$\begin{aligned}
&\cos 2\beta\cos 2\gamma - \sin 2\beta\sin 2\gamma + \cos 2\beta + \cos 2\gamma\\
&= \cos 2\beta(1+\cos 2\gamma) + \cos 2\gamma + 4\sin\beta\sin\gamma\cos\gamma\cos\beta\\
&= 2(2\cos^2\beta - 1)\cos^2\gamma + 2\cos^2\gamma - 4\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma - 1\\
&= 4\cos^2\beta\cos^2\gamma - 4\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma - 1 =\\
&= 4\cos\beta\cos\gamma\cos(\beta+\gamma) - 1 = 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1.
\end{aligned}$$

1572. Analogno prethodnom zadatku.

1573. Analogno zadatku 1571.

1574. Smenom $\alpha + \beta = \gamma$, leva strana se transformiše na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma &= \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\
&= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\
&= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

1575. Uz pretpostavku, nizom transformacija dobijamo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta - 1}\\
&= (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)\left(1 + \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta - 1}\right)\\
&= \frac{(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta - 1} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)}\\
&= \frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma.
\end{aligned}$$

1576. Zamenom $\gamma = \frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)$ leva strana date jednakosti posle jednostvnih transformacija svodi se na 1.

1577. Smenom $\gamma = \frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)$ leva strana se transformiše u desnu.

1578. Analogno prethodnom zadatku.

1579. Dati izraz se transformiše na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \cos\alpha + \sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} &= \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\\
&= 2\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right).
\end{aligned}$$

1580. Kako je $(\cos\alpha - \cos 3\alpha) = 2\sin 2\alpha\sin\alpha$, imamo:

$$2\sin 2\alpha\sin\alpha + \sin 2\alpha = 2\sin 2\alpha\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2\sin 2\alpha\left(\sin\alpha + \sin\frac{\pi}{6}\right) = 4\sin 2\alpha\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right).$$

1581. Dati izraz se transformiše na sledeći način:

$$\begin{aligned}
&1 - \sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) = \cos^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta)\\
&= \frac{1 + \cos(2\alpha+2\beta)}{2} - \frac{1 - \cos(2\alpha-2\beta)}{2}\\
&= \frac{\cos(2\alpha+2\beta) + \cos(2\alpha-2\beta)}{2} = \frac{2\cos\frac{4\alpha}{2}\cos\frac{4\beta}{2}}{2} = \cos 2\alpha\cos 2\beta.
\end{aligned}$$

1582. Dati izraz je identički jednak:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{1-\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=2\operatorname{tg}2\alpha.$$

1583. $\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}$.

1584. Imamo

$$\frac{\sqrt{2}-\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)\right)}{\sin\alpha-\sin(45^\circ-\alpha)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(1-\cos(\alpha-45^\circ))}{2\sin(\alpha-45^\circ)}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha-45^\circ}{2}}{2\sin\frac{\alpha-45^\circ}{2}\cos\frac{\alpha-45^\circ}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha-45^\circ}{2}.$$

1585. Dati izraz se može napisati u obliku

$$\frac{(\sin 2\alpha-\sin 6\alpha)+(\cos 2\alpha-\cos 6\alpha)}{\sin 4\alpha-(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha)}=\frac{-2\cos 4\alpha\sin 2\alpha+2\sin 4\alpha\sin 2\alpha}{\sin 4\alpha-\cos 4\alpha}$$

$$=\frac{2\sin 2\alpha(\sin 4\alpha-\cos 4\alpha)}{\sin 4\alpha-\cos 4\alpha}=2\sin 2\alpha.$$

1586. $4\sin 4\alpha\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ)$.

1587. Dati izraz se transformiše u oblik

$$\begin{aligned}1+\cos 8\alpha+\cos 4\alpha&=2\cos^2 4\alpha+\cos 4\alpha\\&=2\cos 4\alpha\left(\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\right)=2\cos 4\alpha\left(\cos 4\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\right)\\&=4\cos 4\alpha\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2a-\frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

1588. $4\cos 4\alpha\sin(15^\circ-\alpha)\cos(15^\circ+\alpha)$. **1589.** $\operatorname{tg}(\alpha-15^\circ)\operatorname{ctg}(\alpha+15^\circ)$.

1590. Dati izraz identički se transformiše u oblik:

$$\begin{aligned}&(\sin(2\alpha-\beta)+\sin 2\alpha)(\sin(2\alpha-\beta)-\sin 2\alpha)-\sin^2\beta\\&=2\sin\frac{4\alpha-\beta}{2}\cos\left(\frac{-\beta}{2}\right)\cdot 2\cos\frac{4\alpha-\beta}{2}\sin\left(-\frac{\beta}{2}\right)-\sin^2\beta\\&=-2\sin\frac{4\alpha-\beta}{2}\cos\frac{4\alpha-\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin^2\beta\\&=-\sin(4\alpha-\beta)\sin\beta-\sin^2\beta\\&=-\sin\beta\big(\sin(4\alpha-\beta)+\sin\beta\big)=-2\sin 2\alpha\sin\beta\cos(2\alpha-\beta).\end{aligned}$$

1591. Analogno prethodnom zadatku dati izraz postaje:

$$\begin{aligned}&\big(\sin(\alpha-2\beta)-\cos\alpha\big)\cdot\big(\sin(\alpha-2\beta)+\cos\alpha\big)-\cos^2 2\beta\\&=\big(\sin(\alpha-2\beta)-\sin(90^\circ-\alpha)\big)\cdot\big(\sin(\alpha-2\beta)+\sin(90^\circ-\alpha)\big)-\cos^2 2\beta\\&=2\sin(45^\circ-\beta)\cos(45^\circ-\beta)\cdot 2\sin(\alpha-\beta-45^\circ)\cos(\alpha-\beta-45^\circ)-\cos^2 2\beta\\&=\sin(90^\circ-2\beta)\sin(2\alpha-2\beta-90^\circ)-\cos^2 2\beta\\&=-\cos 2\beta\cos(2\alpha-2\beta)-\cos^2 2\beta=-2\cos\alpha\cos 2\beta\cos(\alpha-2\beta).\end{aligned}$$

1592. $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

1593. Smenom $\sin 6x=\sin(8x-2x)$, dati izraz postaje

$$\begin{aligned}&\sin 8x-(\sin 8x\cos 2x-\cos 8x\sin 2x)-\cos 8x\sin 2x\\&=\sin 8x-\sin 8x\cos 2x=\sin 8x(1-\cos 2x)=2\sin^2 x\sin 8x.\end{aligned}$$

1594. Pregrupisati izraz i primeniti poznate obrasce:

$$\begin{aligned}&(\sin x+\sin 3x)+(\sin 2x+\sin 4x)=2\sin 2x\cos x+2\sin 3x\cos x\\&=2\cos x(\sin 2x+\sin 3x)=4\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x.\end{aligned}$$

1595. Napišimo dati izraz u obliku

$$\begin{aligned}&(\sin x+\sin 3x)-(\cos x+\cos 3x)+(\sin 2x-\cos 2x)\\&=2\sin 2x\cos x-2\cos 2x\cos x+(\sin 2x-\cos 2x)\\&=2\cos x(\sin 2x-\cos 2x)+(\sin 2x-\cos 2x)\\&=(2\cos x+1)(\sin 2x-\cos 2x)=2\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)\left(\sin 2x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\right)\\&=4\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

1596. Brojilac i imenilac napisati u obliku

$$(\sin x+\sin 5x)+\sin 3x;\quad (\cos x+\cos 5x)+\cos 3x,$$

i posle jednostavnih transformacija izraz postaje identički jednak $\operatorname{tg}3x$ za $x\neq\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$.

1597. Grupisati izraz u oblik $(\sin x+\sin 3x)+(\sin 9x-\sin 5x)$. Posle jednostavnih transformacija dobija se konačni oblik datog izraza $4\sin 2x\cos 3x\cos 4x$.

1598. Kako je

$$\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\alpha-\beta))$$
$$=\frac{1}{2}(\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta),$$

i kako je

$$\sin(2\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta+\alpha)$$
$$=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin(2\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin\beta,$$

jer je

$$\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)=\sin\beta,$$

imamo

$$\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin\beta-\sin\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha\ \Rightarrow\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2\operatorname{tg}\alpha.$$

1599. Kako je

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},\quad \cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\ \text{ i }\ \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

imamo

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \text{tj.}$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

odakle je

$$\operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\ \operatorname{ctg}x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

1600. Kako je

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{a}{b},$$

primenom obrazaca

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

imamo da je

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2},$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}.$$

1601. Primenom obrasca i zamenom datih vrednosti

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\operatorname{tg}(\alpha+(\beta+\gamma))=\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma}=0\ \Rightarrow\ \alpha+\beta+\gamma=k\pi,$$

tj. dobija se tvrđenje.

1602. Primetimo najpre da su uglovi α, β i γ manji od 45°, jer su njihovi tangensi manji od 1. Primenom obrasca i zamenom datih vrednosti

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\operatorname{tg}\big(\alpha+(\beta+\gamma)\big)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma},$$

sledi da je $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=1$, odakle $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$.

1603. Imamo da je $\operatorname{tg}(2\alpha-(\beta-\gamma))=\frac{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}(\beta-\gamma)}{1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}(\beta-\gamma)}$. Dalje je

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3},\ \operatorname{tg}(\beta-\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\gamma}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=\frac{2-\frac{13}{9}}{1+2\cdot\frac{13}{9}}=\frac{1}{7},$$

pa je $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta+\gamma)=\dfrac{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{7}}=1$. Prema tome $2\alpha-\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$.

1604. Pošto je $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\beta = \dfrac{7}{3}\sqrt{\dfrac{2}{11}}$, $\cos\gamma = \sqrt{\dfrac{2}{11}}$, onda je

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta+\gamma) &= \sin((\alpha+\beta)+\gamma) = \sin(\alpha+\beta)\cos\gamma + \cos(\alpha+\beta)\sin\gamma\\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\cos\gamma + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\sin\gamma\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{11}} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{3\sqrt{11}}\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{11}} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{11}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3\sqrt{11}}\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{11}}$$

$$= \frac{14}{99} + \frac{4}{99} + \frac{28}{33} - \frac{3}{99} = 1,$$

tj. $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = 1 \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{2}$.

1605.

$$\begin{aligned}&\frac{3}{2}\cdot 2\sin 15^\circ\cos 15^\circ + \frac{\sin 60^\circ}{(\sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ)(\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ)}\\ &= \frac{3}{2}\cdot\sin 30^\circ - \frac{\sin 60^\circ}{\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sin 60^\circ}{\cos 30^\circ} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

1606.

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{8}\cdot 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) &= \sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

1607. $\cos\dfrac{\pi}{7} - \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7}$

$$= \frac{2\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{14} - 2\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{14} + 2\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{14}+\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{14}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{14}+\frac{\pi}{14}\right)}{2\cos\frac{\pi}{14}}$$

$$+\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{7}+\frac{\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}-\frac{\pi}{14}\right)}{2\cos\frac{\pi}{14}}$$

$$= \frac{\cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{\pi}{14} + \cos\frac{5\pi}{14} - \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{7\pi}{14} - \cos\frac{5\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{\cos\frac{\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{1}{2}.$$

1608. Posle jednostavnih transformacija leva strana postaje

$$\begin{aligned}8\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ &= \frac{4\cdot 2\sin 10^\circ\cos 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ}{\cos 10^\circ}\\ &= \frac{4\sin 20^\circ\sin 50^\circ\sin(90^\circ-20^\circ)}{\cos 10^\circ} = \frac{2\sin 40^\circ\sin 50^\circ}{\cos 10^\circ}\\ &= \frac{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}{\cos(90^\circ-80^\circ)} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ} = 1.\end{aligned}$$

1609. Leva strana može se napisati u obliku

$$\begin{aligned}&(\sin 10^\circ\cos 10^\circ)(\sin 20^\circ\cos 20^\circ)(\sin 40^\circ\cos 40^\circ)\cdot\sin 30^\circ\cos 30^\circ\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{2}\sin 20^\circ\cdot\frac{1}{2}\sin 40^\circ\cdot\frac{1}{2}\sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{32}\cdot\frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ)\cdot\sin 80^\circ\\ &= \frac{\sqrt{3}}{64}\cdot\left(\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\right)\sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{64}\left(\cos 20^\circ\sin 80^\circ - \frac{1}{2}\sin 80^\circ\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{64}\cdot\left(\frac{1}{2}(\sin 100^\circ + \sin 60^\circ) - \frac{1}{2}\sin 80^\circ\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{128}\cdot\left(\sin(180^\circ-80^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 80^\circ\right) = \frac{\sqrt{3}}{128}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{256}.\end{aligned}$$

1610.

$$\begin{aligned}\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - (\sin 11^\circ + \sin 25^\circ) &= 2\sin 54^\circ\cos 7^\circ - 2\cos 7^\circ\sin 18^\circ\\ &= 2\cos 7^\circ(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ) = 2\cos 7^\circ\cdot 2\cos 36^\circ\sin 18^\circ\\ &= \frac{2\cos 7^\circ\cos 36^\circ\cdot 2\sin 18^\circ\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\cos 7^\circ\cdot 2\sin 36^\circ\cdot\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}\\ &= \frac{\cos 7^\circ\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 7^\circ.\end{aligned}$$

1611.

$$\begin{aligned}\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - (\cos 84^\circ + \cos 12^\circ) &= 2\cos 36^\circ\cos 12^\circ - 2\cos 48^\circ\cos 36^\circ\\ &= 2\cos 36^\circ(\cos 12^\circ - \cos 48^\circ) = 4\cos 36^\circ\sin 18^\circ\sin 30^\circ\\ &= \frac{2\sin 18^\circ\cos 18^\circ\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\sin 36^\circ\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{2\cos(90^\circ-72^\circ)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

1612. Primenom identiteta:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)) \quad \text{i}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

imamo

$$\frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 160^\circ \cos 100^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos 159^\circ \cos 99^\circ}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}(\sin 30^\circ + \sin 10^\circ) + \frac{1}{2}(\cos 260^\circ + \cos 60^\circ)}{\frac{1}{2}(\sin 30^\circ + \sin 12^\circ) + \frac{1}{2}(\cos 258^\circ + \cos 60^\circ)} = \frac{1 + \sin 10^\circ - \sin 10^\circ}{1 + \sin 12^\circ - \sin 12^\circ} = 1.$$

1613. Analogno prethodnom zadatku. **1614.** Analogno zadatku 1612.

1615. $\sin^2 70^\circ \sin^2 50^\circ \sin^2 10^\circ = \dfrac{\sin^2 70^\circ \sin^2 50^\circ \cdot 4\sin^2 10^\circ \cos^2 10^\circ}{4\cos^2 10^\circ}$

$$= \frac{\sin^2 50^\circ \sin^2(90^\circ - 20^\circ)\sin^2 20^\circ}{4\cos^2 10^\circ} = \frac{\sin^2 50^\circ \cdot 4\sin^2 20^\circ \cos^2 20^\circ}{16\cos^2 10^\circ}$$
$$= \frac{\sin^2(90^\circ - 50^\circ)\sin^2 40^\circ}{16\cos^2 10^\circ} = \frac{4\sin^2 40^\circ \cos^2 40^\circ}{64\cos^2 10^\circ} = \frac{\sin^2 80^\circ}{64\cos^2 10^\circ}$$
$$= \frac{\cos^2 10^\circ}{64\cos^2 10^\circ} = \frac{1}{64}.$$

1616. $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\cos 10^\circ} = 2\,\dfrac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ \operatorname{tg} 60^\circ}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$

$$= 2\frac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ \operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 20^\circ} = 2\,\frac{\cos 60^\circ \cos 10^\circ - \sin 60^\circ \sin 10^\circ}{\sin^2 20^\circ \cos 60^\circ}$$
$$= 2\,\frac{\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ \cos 60^\circ} = 2\,\frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ \cos 60^\circ} = 4.$$

1617. $\dfrac{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{2\cos 10^\circ}$

$$= \frac{\sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin(90^\circ - 20^\circ)}{2\cos 10^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ}{4\cos 10^\circ}$$
$$= \frac{2\sin 40^\circ \sin 30^\circ \sin(90^\circ - 40^\circ)}{8\cos 10^\circ} = \frac{\sin 80^\circ \sin 30^\circ}{8\cos 10^\circ} = \frac{1}{16} \cdot \frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{1}{16}.$$

1618. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \dfrac{1}{2}\left(\cos 20^\circ - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 140^\circ)$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos^2 20^\circ - \cos 20^\circ \cos 140^\circ - \frac{1}{2}\cos 20^\circ + \frac{1}{2}\cos 140^\circ\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 40^\circ}{2} - \frac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 160^\circ) - \frac{1}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\cos 40^\circ\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(1 + \cos 40^\circ + \frac{1}{2} + \cos 20^\circ - \cos 20^\circ - \cos 40^\circ\right) = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}.$$

1619. Pogledati prethodna dva zadatka.

1620. Leva strana se može transformisati u oblik

$$\cos 65^\circ(\cos 55^\circ + \cos 175^\circ) + \cos 175^\circ \cos 55^\circ$$
$$= 2\cos 65^\circ \cdot \cos\frac{230^\circ}{2}\cos\frac{120^\circ}{2} + \cos 175^\circ \cos 55^\circ$$
$$= \cos 65^\circ \cos 115^\circ + \cos 175^\circ \cos 55^\circ$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 180^\circ + \cos 50^\circ + \cos 230^\circ + \cos 120^\circ)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2} + 2\cos\frac{230^\circ + 50^\circ}{2}\cos\frac{230^\circ - 50^\circ}{2}\right) = -\frac{3}{4}.$$

1621. Leva strana se transformiše u oblik

$$\sin 135^\circ - \cos 15^\circ + \sin 15^\circ = \cos 45^\circ - \cos 15^\circ + \sin 15^\circ$$
$$= -2\sin 30^\circ \sin 15^\circ + \sin 15^\circ = -\sin 15^\circ + \sin 15^\circ = 0.$$

1622. Posle transformacije proizvoda u zbir, dobija se da je vrednost datog izraza $-\frac{3}{4}$.

1623. Kako je $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, imamo

$$\sin^2\gamma = \sin^2(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin^2(\alpha + \beta) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta.$$

Odatle sledi

$$2\sin^2\alpha \sin^2\beta - 2\sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta = 0$$
$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

1624. Data jednakost može se napisati u obliku

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\beta + \gamma}{2}\cos\frac{\beta - \gamma}{2}}{2\cos\frac{\beta + \gamma}{2}\cos\frac{\beta - \gamma}{2}}, \quad \text{tj.} \quad \sin\alpha = \operatorname{tg}\frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Kako je $\alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \dfrac{\beta + \gamma}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\gamma}{2}$, dobijamo

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{ili} \quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) = 0,$$

tj. $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = \pi$ što je nemoguće.

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, tj. trougao je pravougli.

1625. Kako je $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$, data jednakost postaje

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta\quad\text{ili}$$
$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0,\quad\text{tj.}$$
$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)=0\Rightarrow\beta=90^\circ.$$

1626. Analogno prethodnom zadatku.

1627. Desna strana date jednakosti se transformiše u proizvod, tj.

$$\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)\quad\text{ili}$$
$$\sin(\alpha-\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\Longleftrightarrow\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\Longleftrightarrow\sin(\alpha-\beta)(1-\sin(\alpha+\beta))=0,$$

odakle je $(\sin(\alpha-\beta)=0\Rightarrow\alpha=\beta)\vee\left(\sin(\alpha+\beta)=1\Rightarrow\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}\right)$.

1628. Iz jednakosti

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi\Rightarrow\frac{\beta+\gamma}{2}=\pi-\frac{\alpha+\delta}{2};$$
$$\alpha+\beta=2\pi-\gamma-\delta\quad\text{i}\quad\alpha+\gamma=2\pi-\beta-\delta.$$

Leva strana identički je jednaka:

$$\begin{aligned}&\sin\alpha+\sin\delta+\sin\gamma+\sin\beta\\&=2\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\cos\frac{\alpha-\delta}{2}+2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\\&=2\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\cos\frac{\alpha-\delta}{2}+2\sin\left(\pi-\frac{\alpha+\delta}{2}\right)\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\\&=2\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\delta}{2}+\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\\&=4\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\delta-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}\\&=4\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\delta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\delta+\beta}{2}\right)\\&=4\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\sin\frac{\delta+\gamma}{2}\sin\frac{\delta+\beta}{2}.\end{aligned}$$

1629. I način: Leva strana identički je jednaka

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(4\beta+2\beta)-(\operatorname{tg}4\beta+\operatorname{tg}2\beta)&=\frac{\operatorname{tg}4\beta+\operatorname{tg}2\beta}{1-\operatorname{tg}4\beta\operatorname{tg}2\beta}-(\operatorname{tg}4\beta+\operatorname{tg}2\beta)\\&=(\operatorname{tg}4\beta+\operatorname{tg}2\beta)\left(\frac{1}{1-\operatorname{tg}4\beta\operatorname{tg}2\beta}-1\right)=\frac{\operatorname{tg}4\beta+\operatorname{tg}2\beta}{1-\operatorname{tg}4\beta\operatorname{tg}2\beta}\cdot\operatorname{tg}4\beta\operatorname{tg}2\beta\\&=\operatorname{tg}(4\beta+2\beta)(\operatorname{tg}4\beta\operatorname{tg}2\beta)=\operatorname{tg}6\beta\operatorname{tg}4\beta\operatorname{tg}2\beta.\end{aligned}$$

II način: Ako pođemo od identiteta $\operatorname{tg}6\beta=\dfrac{\operatorname{tg}4\beta+\operatorname{tg}2\beta}{1-\operatorname{tg}4\beta\operatorname{tg}2\beta}$, dobijamo

$$\operatorname{tg}6\beta(1-\operatorname{tg}4\beta\operatorname{tg}2\beta)=\operatorname{tg}4\beta+\operatorname{tg}2\beta\quad\text{ili}$$
$$\operatorname{tg}6\beta-\operatorname{tg}4\beta-\operatorname{tg}2\beta=\operatorname{tg}6\beta\operatorname{tg}4\beta\operatorname{tg}2\beta.$$

1630. Jednakost se transformiše u oblik

$$\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta+2\beta)+\cos(\alpha-\beta-2\beta))=\cos(\alpha+\beta),$$
$$\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-3\beta))=\cos(\alpha+\beta),\quad\text{ili}$$
$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-3\beta)=2\cos(\alpha+\beta).\quad\text{Zatim}$$
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-3\beta)=0,\ \text{odakle je}$$
$$-2\sin\frac{2\alpha-2\beta}{2}\sin\frac{4\beta}{2}=0\vee\sin(\alpha-\beta)=0\vee\sin2\beta=0$$
$$(\alpha-\beta=0\Rightarrow\alpha=\beta)\vee\beta=0.$$

Iz jednakosti $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-3\beta)=0$ nalazimo

$$-2\sin\frac{2\alpha-2\beta}{2}\sin\frac{4\beta}{2}=0\Longleftrightarrow\sin(\alpha-\beta)=0\vee\sin2\beta=0$$
$$(\alpha-\beta=0\Rightarrow\alpha=\beta)\vee\beta=0.$$

1631. Treća jednačina se transformiše na

$$2c=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin x\cos y+\sin y\cos x}{\cos x\cos y}=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}.$$

Količnik prve dve jednačine je

$$\frac{2a}{2b}=\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}=\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x+y}{2},$$

pa je $\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{a}{b}$. Ako se $\cos(x+y)$ izrazi pomoću $\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}$, imamo

$$\cos(x+y)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x+y}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x+y}{2}}=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}.$$

Slično se dobija $\sin(x+y)=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$. Ako se jednačine kvadriraju, a zatim saberu, imamo:

$$\begin{gathered}\sin x+\sin y=2a\wedge\cos x+\cos y=2b\\ \Longleftrightarrow 2+2(\cos x\cos y+\sin y\sin x)=4(a^2+b^2),\end{gathered}$$

a odavde

$$\cos(x-y)=2(a^2+b^2)-1.$$

Zamenom dobijenih izraza nalazimo:

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}+2(a^2+b^2)-1\right).$$

Dakle,

$$2c=\frac{\dfrac{2ab}{a^2+b^2}}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}+2(a^2+b^2)-1\right)}\Longleftrightarrow c\left((a^2+b^2)^2-a^2\right)=ab.$$

1632. I način. Jednakokraki trougao OAB je karakteristični trougao pravilnog desetougla sa krakom $OA=OB=R$, osnovicom $AB=\dfrac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$ i uglom pri vrhu 36°.

$$\sin 18^\circ=\frac{\dfrac{AB}{2}}{R}=\frac{AB}{2R}=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).$$

II način. Pošto je $\cos 54^\circ=\sin 36^\circ$, ili $\cos(3\cdot 18^\circ)=\sin(2\cdot 18^\circ)$, tj.

$$4\cos^3\cdot 18^\circ-3\cos 18^\circ=2\sin 18^\circ\cos 18^\circ.$$

Deljenjem sa $\cos 18^\circ$ dobija se:

$$4\cos^2 18^\circ-3=2\sin 18^\circ$$

ili $4\sin^2 18^\circ+2\sin 18^\circ-1=0$, odakle je

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4},\quad \cos 18^\circ=\sqrt{1-\frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)^2}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\sin 36^\circ=2\sin 18^\circ\cos 18^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},$$

$$\cos 36^\circ=\cos^2 18^\circ-\sin^2 18^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4},\quad \operatorname{tg}36^\circ=\frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

1633. Kako je

$$\operatorname{tg}72^\circ=\frac{2\operatorname{tg}36^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 36^\circ}=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-2},$$

tada je

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2 36^\circ\operatorname{tg}^2 72^\circ&=\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-2}\right)^2=\frac{(5-2\sqrt{5})^2}{(\sqrt{5}-2)^2}\\&=\frac{45-20\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}}=\frac{5(9-4\sqrt{5})}{9-4\sqrt{5}}=5.\end{aligned}$$

1634. Kako je

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ\Rightarrow\alpha=180^\circ-(\beta+\gamma),$$

imamo

$$\sin\alpha=\sin(180^\circ-(\beta+\gamma))\Rightarrow\sin\alpha=\sin(\beta+\gamma)$$

(1) $$\Rightarrow\sin\alpha=\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma.$$

Pošto je $\sin\beta=\dfrac{b\sin\alpha}{a}$ i $\sin\gamma=\dfrac{c\sin\alpha}{a}$, zamenom u (1) dobijamo

$$\sin\alpha=\frac{b\sin\alpha}{a}\cos\gamma+\frac{c\sin\alpha}{a}\cos\beta\quad\text{ili } a=b\cos\gamma+c\cos\beta.$$

Analogno

$$b=c\cos\alpha+a\cos\beta,\quad c=a\cos\beta+b\cos\alpha.$$

Ako se pomnoži prva jednačina sa $-a$, druga sa $-b$, treća sa c i ako se onda sve tri saberu, dobija se $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$, itd.

1635. Ako se primeni kosinusna teorema i količnik:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sqrt{1-\cos\beta}}=\frac{\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}}{\sqrt{(1+\cos\beta)(1-\cos\beta)}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}}{\sqrt{\left(1+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)\left(1-\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)}}$$
$$= \sqrt{\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)4a^2c^2}{(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)4b^2c^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)a^2}{((a+c)^2-b^2)(b^2-(a-c)^2)b^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)a^2}{(a+c+b)(a+c-b)(b-a+c)(b+a-c)b^2}} = \frac{a}{b},$$

dobija se sinusna teorema.

1636. $\dfrac{3m^2+1}{4}$. **1637.** $\dfrac{m}{2}(m^2+1)$.

1638. Rastavimo razliku kvadrata. Imamo

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$$
$$=\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right)$$
$$=\sin\frac{5\pi}{12}\sin\left(\frac{\pi}{12}+2\alpha\right).$$

Onda izraz postaje $\sin\dfrac{5\pi}{12}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}+2\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}-2\alpha\right)\cos\dfrac{5\pi}{12}$. Ako se oba proizvoda transformišu u zbir i izvrše identične transformacije, poslednji izraz postaje

$$2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2m}{1+m^2}.$$

1639. Iz $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right)=\dfrac{4}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}x=\dfrac{4}{3}$ nalazimo

$$\sin x=\frac{4}{5} \quad \text{i} \quad \cos x=\frac{3}{5}.$$

Pretvaranjem proizvoda u zbir lako se izračunava vrednost izraza:

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}=\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos 2x)$$
$$=\frac{1}{2}\left(4\cos^3 x+2\cos^2 x-3\cos x-1\right)=-\frac{76}{125}.$$

1640. Analogno prethodnom zadatku $\dfrac{41}{125}$.

1641. Datu jednakost napišimo u obliku

$$\sin 2\beta(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=\sin 2\gamma(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma)$$

ili

$$\sin\beta\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma\sin(\alpha+\gamma),$$

odakle je

$$\frac{1}{2}(\cos(\beta-\alpha-\beta)-\cos(\beta+\alpha+\beta))=\frac{1}{2}(\cos(\gamma-\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+2\gamma)),$$

tj. $\cos(\alpha+2\gamma)-\cos(2\beta+\alpha)=0$. Transformišimo ovu razliku u proizvod. Imamo $\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(\gamma-\beta)=0$, a zatim $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=0\vee\sin(\gamma-\beta)=0$. Odavde izlaze sledeće jednakosti

$$\alpha+\beta+\gamma=k\pi, \quad \gamma-\beta=n\pi, \quad (k,n=0,\pm1,\pm2\ldots).$$

1642. Iz date jednakosti dobija se $\dfrac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma}-\dfrac{\sin\beta\cos\gamma}{\sin\gamma\cos\beta}=0$ ili

$$\sin\beta(\sin\beta\cos\beta-\sin\gamma\cos\gamma)=0,$$

tj. $\sin\beta\left(\dfrac{1}{2}\sin 2\beta-\dfrac{1}{2}\sin 2\gamma\right)=0 \Rightarrow \sin 2\beta-\sin 2\gamma=0$. Odavde je

$$2\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)=0.$$

Dakle, $\cos(\beta+\gamma)=0$ i $\sin(\beta-\gamma)=0$. Tražene jednakosti su:

$$\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}(2k+1); \quad \beta-\gamma=n\pi, \quad (n,k=0,\pm1,\pm2\ldots).$$

1643. Datu jednakost možemo napisati u obliku

$$\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z)+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=0. \tag{1}$$

Neka je $1-\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z=0$. Tada iz (1) sledi

$$\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=0 \Rightarrow \operatorname{tg}^2y+\operatorname{tg}^2z=-2,$$

što je nemoguće za realne vrednosti y i z. Podelimo (1) sa $1-\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z\neq0$. Imamo

$$\operatorname{tg}x+\frac{\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z}=0 \quad \text{ili} \quad \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}(y+z)=0$$

tj. $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}(-y-z)$, odakle je $x=-y-z+k\pi$ ili $x+y+z=k\pi$. Ovo je tražena veza između uglova za koje pretpostavljamo da su različiti od $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, da bi bili definisani odgovarajući tangensi.

1644. Data jednakost se može napisati u obliku

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\\&\quad=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-z\right).\end{aligned}$$

Primenom rešenja prethodnog zadatka imamo

$$\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{2}-y+\frac{\pi}{2}-z=k\pi\quad\text{ili}\quad x+y+z=\frac{3\pi}{2}-k\pi.$$

Smenom $1-k=n$ dobijamo $x+y+z=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$.

1645. Data jednakost se svodi na

$$\sin(\beta+\gamma)\cos\beta-\sin(\alpha+\gamma)\cos\alpha=0,\quad\text{ili}$$
$$\frac{1}{2}(\sin(\gamma+2\beta)+\sin\gamma)-\frac{1}{2}(\sin(2\alpha+\gamma)+\sin\gamma)=0,$$

odakle

$$\sin(\gamma+2\beta)-\sin(2\alpha+\gamma)=0,\quad\text{tj.}\quad 2\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\sin(\beta-\alpha)=0.$$

Poslednja jednakost je zadovoljena za:

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}(4k+1)\vee\beta-\alpha=n\pi,\quad(n,k=0,\pm1,\pm2\ldots).$$

1646. Analogno prethodnom zadatku.

1647. Transformišimo datu jednakost na sledeći način:

$$\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)=1-\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma,$$

odakle je

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma},\quad\text{tj.}\quad\operatorname{ctg}\alpha=-\operatorname{ctg}(\beta+\gamma)=\operatorname{ctg}(\pi-\beta-\gamma).$$

Kako su α, β i γ oštri uglovi, imamo $\alpha=\pi-\beta-\gamma\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

1648. Imamo

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}}=\frac{\sin 60^\circ-\sin 45^\circ}{\sin 45^\circ-\sin 30^\circ}=\frac{2\cos\dfrac{105^\circ}{2}\sin\dfrac{15^\circ}{2}}{2\cos\dfrac{75^\circ}{2}\sin\dfrac{15^\circ}{2}}\\&=\frac{\cos\left(90^\circ-\dfrac{75^\circ}{2}\right)}{\cos\dfrac{75^\circ}{2}}=\operatorname{tg}\frac{75^\circ}{2}\Rightarrow\alpha=37^\circ30'.\end{aligned}$$

1649. $\alpha=7^\circ30'$.

1650. Iz $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ dobijamo

$$a^2=b^2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+c^2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)-2bc\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right),$$

odnosno

$$a^2=(b^2+2bc+c^2)\sin^2\frac{\alpha}{2}+(b^2-2bc+c^2)\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

odakle je

$$a^2=(b+c)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+(b-c)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

1651. Data jednakost se može napisati u obliku

$$a\left(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)=b\left(\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}-1\right),\ \text{ili}$$

$$a\,\frac{\cos\left(\alpha+\dfrac{\gamma}{2}\right)}{\cos\alpha\cos\dfrac{\gamma}{2}}=-b\,\frac{\cos\left(\beta+\dfrac{\gamma}{2}\right)}{\cos\beta\cos\dfrac{\gamma}{2}},$$

odakle je

$$a\cos\beta\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)+b\cos\alpha\cos\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)=0.$$

Kako je $\dfrac{\gamma}{2}=90^\circ-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $\alpha+\dfrac{\gamma}{2}=90^\circ-\dfrac{\beta-\alpha}{2}$, $\beta+\dfrac{\gamma}{2}=90^\circ-\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, onda je $a\cos\beta\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}-b\cos\alpha\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}=0$, ili $\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}(a\cos\beta-b\cos\alpha)=0$, odakle je

$$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=0\Rightarrow\frac{\beta-\alpha}{2}=0\Rightarrow\alpha=\beta\quad\text{ili}$$
$$a\cos\beta-b\cos\alpha=0,\quad a\cos\beta=b\cos\alpha.$$

Ova jednakost sa kosinusnom teoremom daje

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

Razlika ovih jednakosti daje $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$.

1652. Ako uglovi trougla ispunjavaju uslove $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma < 180^\circ$ i ako je $\gamma = 90^\circ$, tada je razlika

$$\begin{aligned} P - Q &= \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 1) \\ &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 - \left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 1\right) \\ &= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right) = 0, \quad \text{tj.} \quad P = Q. \end{aligned}$$

Obrnuto, ako je tačna jednakost $P = Q$, tada je

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 1,$$
$$\sin\alpha - \sin(90^\circ - \alpha) + \sin\beta - \sin(90^\circ - \beta) + \sin\gamma - \sin(90^\circ - \gamma) = 1 \quad \text{ili}$$
$$\sqrt{2}\sin(\alpha - 45^\circ) + \sqrt{2}\sin(\beta - 45^\circ) + \sqrt{2}\sin(\gamma - 45^\circ) = 1,$$

odakle je

$$\sin(\alpha - 45^\circ) + \sin(\beta - 45^\circ) = \sin 45^\circ - \sin(\gamma - 45^\circ).$$

Dakle,

$$2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - 45^\circ\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\sin\left(45^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) \quad \text{ili}$$
$$\sin\left(45^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}\sin\left(45^\circ - \frac{\gamma}{2}\right), \quad \text{tj.}$$
$$\sin\left(45^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}\right) = 0,$$

odakle je

$$\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(45^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = 0. \tag{1}$$

Kako su uglovi $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ oštri, iz (1) izlazi da bar jedan od uglova α, β, γ mora biti 90°, tj. trougao je pravougli.

1653. Kako je $\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} 30^\circ$, data jednakost se transformiše na

$$\sin\alpha\cos 30^\circ - \cos\alpha\sin 30^\circ + \sin\beta\cos 30^\circ$$
$$- \sin 30^\circ\cos\beta + \sin\gamma\cos 30^\circ - \cos\gamma\sin 30^\circ \quad \text{ili na}$$
$$\sin(\alpha - 30^\circ) + \sin(\beta - 30^\circ) + \sin(\gamma - 30^\circ) = 0.$$

Ne umanjujući dokaz, ako pretpostavimo da je $\gamma > 30^\circ$, tada je

$$2\sin\left(60^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin(\gamma - 30^\circ) = 0,$$

odakle sledi

$$\sin\left(60^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) < 0 \Rightarrow 60^\circ - \frac{\gamma}{2} < 0 \Rightarrow \gamma > 120^\circ.$$

1662. Primenom obrasca za transformaciju proizvoda sinusa u zbir, leva strana jednakosti se svodi na desnu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4\sin 70^\circ &= \frac{1 - 4\sin 70^\circ\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} \\ &= \frac{1 - 4\cdot 0,5(\cos(70^\circ - 10^\circ) - \cos(70^\circ + 10^\circ))}{\sin 10^\circ} \\ &= \frac{1 - 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)}{\sin 10^\circ} = \frac{2\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ} = 2. \end{aligned}$$

1663. Ako se članovi grupišu po dva i izvrše odgovarajuće transformacije, dobija se tvrđenje na ovaj način:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} 81^\circ + \operatorname{tg} 9^\circ) - (\operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 27^\circ) &= \frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ\cos 81^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\sin 27^\circ\cos 63^\circ} \\ &= \frac{1}{\sin 9^\circ\cos 9^\circ} - \frac{1}{\sin 27^\circ\cos 27^\circ} = 2\left(\frac{1}{\sin 18^\circ} - \frac{1}{\sin 54^\circ}\right) \\ &= \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 54^\circ\sin 18^\circ} = \frac{4\cos 36^\circ\sin 18^\circ}{\sin 54^\circ\sin 18^\circ} = 4. \end{aligned}$$

1664. Primeniti da je

$$\sin^2 24^\circ - \sin^2 6^\circ = (\sin 24^\circ + \sin 6^\circ)(\sin 24^\circ - \sin 6^\circ).$$

Zatim se transformišu zbir i razlika sinusa u proizvod.

1665. U zadacima 1665–1667 primeniti obrasce za poluuglove trigonometrijskih funkcija.

1668. a) Iz $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{7}$ i $\operatorname{tg} 2y = \dfrac{3}{4}$ sledi $\operatorname{tg}(x+2y) = 1$, i odavde $x + 2y = 45^\circ$;
b) izračunati $\cos x$ i $\cos y$ koristeći osnovne trigonometrijske jednakosti koje ih povezuju sa $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{tg} y$, a zatim izračunati $\cos 2x$ i $\sin 4y$.

1669. Vrednost datog izraza je $S = -3$, što znači da ne zavisi od x.

1670. Data jednakost se transformiše na sledeći način:

$$\begin{aligned}
0 &= \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 1 = \frac{1+\cos 2A}{2} + \frac{1+\cos 2B}{2} + \cos^2 C - 1\\
&= \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C = \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2 C\\
&= \cos(180^\circ - C)\cos(A-B) + \cos^2 C = -\cos C(\cos(A-B) - \cos C)\\
&= 2\cos C \sin\frac{A-B+C}{2}\sin\frac{A-B-C}{2} = 2\cos A\cos B\cos C.
\end{aligned}$$

Odavde sledi da je jedan od uglova A, B, C jednak 90°.

1671. Iz date relacije dobija se redom sledeće:

$$\begin{aligned}
&\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1\\
&\iff \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1\\
&\iff 2\cos(A+B)\cos(A-B) + \cos 2(A+B) = -1\\
&\iff 2\cos(A+B)\cos(A-B) + 2\cos^2(A+B) = 0\\
&\iff 2\cos(A+B)\cos(A-B) + \cos(A+B) = 0\\
&\iff \cos(A+B)\cos A \cdot \cos\cos B = 0.
\end{aligned}$$

Odavde je $A + B = 90^\circ$ ili $B = 90^\circ$.

Dakle trougao je pravougli, čime je dokaz završen.

1672. a) Kako je $3C = 3\cdot 180^\circ - 3(A+B)$, jednakost se posle primene odgovarajućih formula svodi na oblik

$$2\cos\frac{3(A+B)}{2}\cos\frac{3(A-B)}{2} - \cos 3(A-B) - 1 = 0, \quad \text{odnosno}$$

$$2\cos\frac{3(A+B)}{2}\cos\frac{3(A-B)}{2} - 2\cos^2\frac{3(A+B)}{2} = 0$$

$$\iff 2\cos\frac{3(A+B)}{2}\left(\cos\frac{3(A-B)}{2} - \cos\frac{3(A+B)}{2}\right) = 0.$$

Dalje je $\dfrac{3(A+B)}{2} = 270^\circ - \dfrac{3}{2}C$, pa je

$$\cos\frac{3(A+B)}{2} = \cos\left(90^\circ + \frac{3}{2}C\right) = -\sin\frac{3}{2}C,$$

a razlika kosinusa u zagradama jednaka je $-2\sin\dfrac{3}{2}A\sin\dfrac{3}{2}B$.

Prema tome, poslednja jednakost se svodi na oblik

$$\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2} = 0.$$

Da bi ovaj proizvod bio jednak nuli potrebno je i dovoljno da jedan od faktora bude jednak nuli.

Neka na primer $\sin\dfrac{3A}{2} = 0$; onda je $\dfrac{3A}{2} = 180^\circ$ ili $A = 120^\circ$.

b) Slično postupku pod a) data jednakost se transformiše na oblik

$$\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2} = 0,$$

odakle se izvodi zaključak da je jedan od uglova jednak 60°.

1673. Analogno zadacima 1670–1671.

1674. Neka je $\arcsin\dfrac{3}{5} = x$ i $\arcsin\dfrac{4}{5} = y$, tada je $\sin x = \dfrac{3}{5}$, $\sin y = \dfrac{4}{5}$.
Izračunava se da je $\cos x = \dfrac{4}{5}$ i $\cos y = \dfrac{3}{5}$. Tada je

$$\begin{aligned}
\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{4}{5}\right) &= \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y\\
&= \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} = 1.
\end{aligned}$$

1675. $\dfrac{13}{85}$. $\dfrac{71}{98}$. **1677.** 1. **1678.** 8. **1679.** $-\dfrac{9}{13}$.

1680. Ako se dati izraz označi sa x i uzme se tangens od leve i desne strane, dobija se

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} \iff \operatorname{tg} x = 1 \iff x = \frac{\pi}{4}.$$

Dakle, vrednost datog izraza je $\dfrac{\pi}{4}$.

1681. 1. **1682.** 0. **1683.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **1684.** $\dfrac{77}{85}$.

1685. Analogno zadatku 1680.

1686. Neka je $\arcsin x = y \Rightarrow \sin y = \dfrac{\operatorname{tg} y}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}}$. Imamo

$$\operatorname{tg} y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \operatorname{ctg} y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad \text{pa je}$$

$$y = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

1687. Neka je $A = \arcsin x + \arcsin y$, $\arcsin x = u$ i $\arcsin y = v$. Poslednje dve jednakosti ekvivalentne su jednakostima $x = \sin u$ i $y = \sin v$. Sinus leve i desne strane prve jednakosti svodi se postupno

$$\sin A = \sin(\arcsin x)\cos(\arcsin y) + \cos(\arcsin x)\sin(\arcsin y),$$

pa je

$$\sin A = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

Odavde sledi da je

$$A = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right).$$

1688. Analogno prethodnom zadatku. **1689.** Analogno zadatku 1687.

4.4. Trigonometrijske jednačine

1690. Data jednačina se svodi na

$$\sin x(2\sin x + 1) = 0 \Longleftrightarrow \sin x = 0 \vee 2\sin x + 1 = 0.$$

Jednačina $\sin x = 0 \Longleftrightarrow x_k = k\pi$, $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, a jednačina

$$2\sin x + 1 = 0 \Longleftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow x_m = \frac{7\pi}{6} + 2m\pi \vee x_n = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi, \quad (m, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

1691. $x_k = k\pi$, $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ $x_m = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2m\pi$, $(m = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1692. Ako se jednačina napiše u obliku

$$\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Longleftrightarrow 3x - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2k\pi \vee 3x + \left(-\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2m\pi,$$

tj.

$$x_k = \frac{\pi}{10}(4k+1) \vee x_m = \frac{\pi}{2}(4m+1) \quad (k, m = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

1693. Ako levu i desnu stranu jednačine razvijemo po adicionoj teoremi, dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \Longleftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$$

Prema tome, $x_k = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1694. a) $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$, $x = \dfrac{7\pi}{18} + \dfrac{2n\pi}{3}$; b) $x = \dfrac{1}{6} \pm \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3}$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

1695. a) $x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$; b) $x = \dfrac{\pi}{6} - 0,25 + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1696. a) $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + n\pi$, $x = \dfrac{2\pi}{3} + m\pi$, $x = \dfrac{11\pi}{12} + r\pi$;
b) $x = \dfrac{1}{8} \pm \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}$, $x = \dfrac{1}{8} \pm \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n\pi}{2}$, $k, n, m, r \in \mathbb{Z}$.

1697. a) $x = \dfrac{k\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n\pi}{2}$;
b) $x = \dfrac{7\pi}{2} + 8k\pi$, $x = -\dfrac{5\pi}{2} + 8n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

1698. $x_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x_m = \dfrac{\pi}{6} + 2m\pi \vee x_n = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi$
$(k, m, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1699. $x_k = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x_m = \dfrac{\pi}{2} + m\pi \vee x_n = \dfrac{5\pi}{2} + 2n\pi$
$(k, m, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1700. $x_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x_n = \dfrac{3\pi}{4} + n\pi$, $(k, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1701. Data jednačina ekvivalentna je jednačinama:

$$\sin 3x + (\sin 5x + \sin x) = 0 \Longleftrightarrow \sin 3x + 2\sin 3x\cos 2x = 0$$
$$\sin 3x(2\cos 2x + 1) = 0.$$

Odatle sledi

$$x_k = \frac{k\pi}{3} \vee x_m = \frac{\pi}{3} + m\pi \vee x_n = \frac{2\pi}{3} + n\pi, \quad (k, m, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

1702. $x_k = (2k+1)\pi \vee x_m = \dfrac{4\pi}{3} + 4m\pi \vee x_n = -\dfrac{4\pi}{3} + 4n\pi$,
$(k, m, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1703. Da bi data jednačina imala rešenja mora biti istovremeno

$$\sin x = 1 \quad \text{i} \quad \sin 5x = 1, \text{ tj. } x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad x_k = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, \quad (k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Rešenja date jednačine se dobijaju rešavanjem Diofantove jednačine

$$\frac{\pi}{2} + 2n\pi = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \iff 5n - k + 1 = 0.$$

Za $k = 5n + 1$, rešenje druge jednačine je $x_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$. Dakle, rešenje prve jednačine zadovoljava drugu.

1704. $x_k = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2}$, $(k = 0, \pm 1, +2, \ldots)$.

1705. Ova jednačina se svodi na kvadratnu jednačinu po $\cos x$,

$$\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0,$$

čija su rešenja $\cos x = -3$, $\cos x = 1$. Kako prvo rešenje nema smisla, ostaje samo $\cos x = 1$, odakle je $x_k = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1706. Data jednačina se svodi na:

$$\sin\frac{x}{2} - (1 - \cos x) = 0 \iff \sin\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0 \iff \sin\frac{x}{2}\left(1 - 2\sin\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Odavde je $\left(\sin\dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow x_k = 2k\pi\right)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, ili

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \iff x_m = \frac{\pi}{3} + 4m\pi \vee x_n = \frac{5\pi}{3} + 4n\pi, (m, n = 0, \pm 1, +2, \ldots).$$

1707. Kako je $\sqrt{3} = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$ leva strana transformiše se u oblik $2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 2$, odakle sledi

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \iff x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

1708. Data jednačina je ekvivalentna disjunkciji $\cos x = 3 \vee \cos x = \dfrac{1}{2}$. Kako prva jednačina nema realnih rešenja, rešenja date jednačine su rešenja druge jednačine sistema: $x_k = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1709. $x_k = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \vee x_n = \dfrac{7\pi}{6} + 2n\pi \vee x_m = \dfrac{11\pi}{6} + 2m\pi$ $(k, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

1710. $x_k = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \vee x_m = \operatorname{arctg} 2 + m\pi$, $(k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1711. $x_k = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1712. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} - 1 = 2\sin x\cos x \iff \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} - 2\sin x\cos x = 0$$
$$\iff \sin x\left(\frac{1}{\cos x - \sin x} - \cos x\right) = 0$$
$$\iff \sin x = 0 \vee \frac{1}{\cos x - \sin x} - \cos x = 0.$$

Jednačina

(1) $\qquad \sin x = 0 \iff x_k = k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$

a jednačina

$$\frac{1}{\cos x - \sin x} - \cos x = 0 \iff \frac{1 - \cos^2 x + \sin x\cos x}{\cos x - \sin x} = 0.$$

Za $\cos x - \sin x \neq 0$ imamo

$$\sin^2 x + \sin x\cos x = 0, \quad \sin x(\sin x + \cos x) = 0,$$

odakle sledi da je $\sin x = 0$ čija su rešenja (1) ili

$$\sin x + \cos x = 0 \iff \operatorname{tg} x = -1 \iff x_m = \frac{3\pi}{4} + 2m\pi, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

1713. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0.$$

Kako je $(\cos^2 x + \sin^2 x) \neq 0$, tada je

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 0 \iff \operatorname{tg}^2 x = 1 \iff x_k = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

1714. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\frac{1}{2}\sin 2x = 1 - \sin^2 x$$
$$\iff \sin x\cos x - \cos^2 x = 0 \iff (\cos x = 0 \vee \operatorname{tg} x = 1)$$
$$\iff x_n = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \vee x_m = m\pi + \frac{\pi}{4}, \quad (n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

1715. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{2} \iff \cos 2x = -\frac{1}{2}$$
$$\iff x_k = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

1716. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{5}{8} \iff 2 + 2\cos^2 2x = \frac{5}{2}$$
$$\iff 1 + \cos 4x = \frac{1}{2} \iff \cos 4x = -\frac{1}{2}$$
$$\iff x_k = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

1717. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) - \frac{1}{2}(\sin 14x + \sin 2x) = 0 \iff \sin 8x - \sin 14x = 0$$
$$\iff -2\sin 3x \cos 11x = 0 \iff \sin 3x = 0 \vee \cos 11x = 0.$$

Jednačina

$$\sin 3x = 0 \Rightarrow x_k = \frac{k\pi}{3}, \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots),$$

a jednačina

$$\cos 11x = 0 \iff x_m = \frac{\pi}{22}(2m+1), \quad (m = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

1718. $x_k = k\pi \vee x_n = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{n\pi}{9}$, $(k, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1719. $x_k = \dfrac{k\pi}{3}$, $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1720. $x_k = \dfrac{\pi}{2}(2k+1) \vee x_m = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $(k, m = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1721. $x_k = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1722. $x_k = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1723. $x_k = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x_m = (2m+1)\pi$, $(k, m = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1724. Izrazimo $\operatorname{tg} 2x$ i $\sin 2x$ pomoću $\operatorname{tg} x$. Imamo

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} - \operatorname{tg} x = \frac{4}{3} \cdot \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Ova jednačina ekvivalentna je sistemu

$$\operatorname{tg} x = 0 \vee \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - 1 = \frac{8}{3(1 + \operatorname{tg}^2 x)}.$$

Prva jednačina daje skup rešenja $x_k = k\pi$, $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, a druga je ekvivalentna jednačini

$$3\operatorname{tg}^4 x + 14\operatorname{tg}^2 x - 5 = 0,$$

odakle sledi

$$\operatorname{tg} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \iff x_m = \frac{\pi}{6} + m\pi \vee x_n = \frac{5\pi}{6} + n\pi, \quad (m, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

Jednačina $\operatorname{tg}^2 x = -5$ nema realnih rešenja.

1725. $x_k = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \vee x_m = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $(k, m = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1726. $x_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee x_m = \dfrac{2m\pi}{5} \vee x_n = (2n+1)\pi$, $(k, m, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1727. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\begin{aligned}
&(\sin x + \sin 3x) - (\cos x + \cos 3x) + (\sin 2x - \cos 2x) = 0 \\
&\iff 2\sin 2x \cos x - 2\cos 2x + (\sin 2x - \cos 2x) = 0 \\
&\iff (2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0 \\
&\iff 2\cos x + 1 = 0 \vee \sin 2x - \cos 2x = 0,
\end{aligned}$$

odakle sledi da je:

$$2\cos x + 1 = 0 \iff x_n = \frac{2\pi}{3}(3n \pm 1), \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots),$$
$$\sin 2x - \cos 2x = 0 \iff \operatorname{tg} 2x = 1 \iff x_k = \frac{\pi}{8}(4k+1), \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

1728. Data jednačina se svodi na:

$$(\cos 2x + \cos 6x) - (1 - \cos 8x) = 0 \iff 2\cos 4x \cos 2x - 2\cos^2 4x = 0$$
$$\iff \cos 4x \sin 3x \sin x = 0 \iff \cos 4x = 0 \vee \sin 3x = 0 \vee \sin x = 0.$$

Kako su rešenja jednačine $\sin x = 0$ sadržana u skupu rešenja jednačine $\sin 3x = 0$, onda je

$$x_k = \frac{\pi}{8}(2k+1) \vee x_n = \frac{n\pi}{3}, \quad (k, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

1729. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}\iff\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)=0$$
$$\iff\sin\frac{3x}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$
$$\iff\sin\frac{3x}{2}=0\vee\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=0\vee\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Rešenja date jednačine su

$$x_k=\frac{2k\pi}{3}\vee x_n=\frac{\pi}{2}(4n-1)\vee x_m=\frac{\pi}{4}(4m+1),\quad(k,n,m=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

1730. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$2\sin3x\cos2x+1-\cos2x=1\iff\cos2x(2\sin3x-1)=0,$$

odavde sledi

$$x_k=\frac{\pi}{4}(2k+1),\quad x_n=\frac{\pi}{18}+\frac{2n\pi}{3},\quad x_m=\frac{5\pi}{18}+\frac{2m\pi}{3}\quad(k,n,m\in\mathbb{Z}).$$

1731. Data jednačina je ekvivalentna jednačini

$$\sin5x-\sin3x=0\iff2\sin x\cos4x=0.$$

Odatle sledi da su rešenja:

$$x_k=k\pi\vee x_n=\frac{\pi}{8}(2n+1),\quad(k,n=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

1732. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\cos4x+2\cos^2x=0\iff\cos4x+1+\cos2x=0$$
$$\iff2\cos^22x+\cos2x=0\iff\cos2x(2\cos2x+1)=0.$$

Dakle, rešenja date jednačine su:

$$x_k=k\pi\pm\frac{\pi}{4}\vee x_n=n\pi\pm\frac{\pi}{3},\quad(k,n=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

1733. Kako je $1+\cos4x=2\cos^22x$, dobija se $\cos^22x(2\sin4x-1)=0$, odakle izlazi $x_k=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\vee x_n=\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{2}\vee x_m=\frac{5\pi}{24}+\frac{m\pi}{2}\quad(k,n,m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

1734. $x_k=\frac{k\pi}{4}\ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

1735. $x_k=\frac{k\pi}{2}\vee x_n=\frac{\pi}{8}(2n+1)\ (k,n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

1736. Kako je $\sin x=\frac{2a-3}{4-a}$ ova jednačina ima rešenje ako je

$$-1\le\frac{2a-3}{4-a}\le1\iff a\in\left(-1,\frac{7}{3}\right].$$

1737. Data jednačina ekvivalentna je jednačini $\sin2x=\frac{2}{m}$, odakle sledi $m\le-2\vee m\ge2$.

1738. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\frac{\sin mx}{\cos mx}\cdot\frac{\sin nx}{\cos nx}=1\iff\sin mx\sin nx=\cos mx\cos nx$$
$$\iff\cos(mx+nx)=0\iff x_k=\frac{2k+1}{m+n}\cdot\frac{\pi}{2},\quad(k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

1739. Data jednačina se svodi na:

$$\sin px-\sin\left(\frac{\pi}{2}-qx\right)=0\iff\sin\left(\frac{p+q}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=0$$
$$\iff\sin\left(\frac{p+q}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=0\vee\cos\left(\frac{p-q}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

odakle je

$$(1)\qquad\frac{p+q}{2}x-\frac{\pi}{4}=k\pi\iff x_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{4k+1}{p+q}\pi,\quad(k=0,\pm1,2,\ldots),$$
$$(2)\qquad\frac{p-q}{2}x+\frac{\pi}{4}=\frac{2m+1}{2}\pi\iff x_m=\frac{1}{2}\cdot\frac{4m+1}{p-q}\pi,\quad(m=0,\pm1,2,\ldots).$$

U slučaju $p=q$ skup rešenja (2) nema smisla, pa je rešenje $x_k=\frac{4k+1}{4p}\pi$, dok za $p=-q$ skup rešenja (1) nema smisla. U slučaju (2) rešenje je $x_m=\frac{4m+1}{4p}\pi$.

1740. Data jednačina postaje:

$$4\sin x\sin2x\sin3x=2\sin2x\cos2x\iff\sin2x(2\sin x\sin3x-\cos2x)=0$$
$$\iff\sin2x\cos4x=0,$$

gde je proizvod $\sin x\sin3x$ transformisan u zbir. Rešenja su:

$$x_n=\frac{n\pi}{2}\vee x_k=\frac{\pi}{8}(2k+1),\quad(n,k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

1741. Kako je

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{x}{2},$$

data jednačina ekvivalentna je jednačini $2(1+\cos x)-\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=0$. Ako primenimo formulu $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{\sin x}$, tada je poslednja jednačina ekvivalentna sistemu

$$\left(1+\cos x=0 \vee \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow x_n=(2n+1)\pi \vee x_k=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{3}, \quad (n,k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

1742. Ako se zameni $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$, data jednačina se svodi na

$$\frac{1+\cos x}{\sin x(1+\cos x)}=2 \Longleftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \quad (1+\cos x\neq 0)$$

$$\Rightarrow x_k=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}, \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

1743. Pošto je $\operatorname{ctg}(x-\pi)=-\operatorname{ctg}(\pi-x)=\operatorname{ctg} x$, data jednačina se svodi na

$$2\operatorname{ctg} x-(\cos x+\sin x)\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}\right)=4 \Longleftrightarrow \frac{1}{\sin x\cos x}=4$$

$$\Longleftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow x_k=\frac{\pi}{2}k+(-1)^k\frac{\pi}{12}, \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

1744. Leva strana jednačine se svodi na $1-\sin x$, a imenilac desne strane na

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{2}{\sin x},$$

odakle sledi da je data jednačina ekvivalentna jednačini

$$1-\sin x=\sin x \Rightarrow x_k=k\cdot 180^\circ+(-1)^k 30^\circ, \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

1745. Jednačina se može napisati u obliku

$$3\sin x-4\sin^3 x=4\sin x(1-2\sin^2 x) \quad \text{ili} \quad \sin x(4\sin^2 x-1)=0.$$

Rešenja su: $x_n=n\cdot 180^\circ \vee x_m=m\cdot 180^\circ\pm 30^\circ, \quad (n,m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

1746. $x_k=(2k+1)\pi \vee x_n=\frac{\pi}{6}+\frac{2n\pi}{3}$ $(k,n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

1747. $x_k=\frac{k\pi}{6} \vee x_n=\pm\frac{5\pi}{6}+2n\pi$ $(k,n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

1748. Jednačina se može napisati u obliku

$$(\cos x+\cos 3x)+(\cos x+\cos 5x)=0.$$

Rešenja su: $x_n=\frac{2n+1}{4}\pi \vee x_m=\frac{2m+1}{2}\pi \quad (m,n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

1749. Data jednačina ekvivalentna je sa:

$$2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos^2 x+\cos x$$

$$\Longleftrightarrow \sin 2x(2\cos x+1)=\cos x(2\cos x+1)$$

$$\Longleftrightarrow 2\sin x\cos x(2\cos x+1)-\cos x(2\cos x+1)=0$$

$$\Longleftrightarrow \cos x(2\cos x+1)(2\sin x-1)=0,$$

$$\Rightarrow x_k=k\pi+\frac{\pi}{2} \vee x_n=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3} \vee x_m=m\pi+(-1)^m\frac{\pi}{6} \quad (k,n,m\in\mathbb{Z}).$$

1750. Data jednačina je ekvivalentna jednačini:

$$\sin^2 2x=\sin 3x+\sin x \Longleftrightarrow \sin^2 2x-2\sin 2x\cos x=0$$

$$\Longleftrightarrow 2\sin 2x\cos x(\sin x-1)=0 \Longleftrightarrow \sin 2x=0$$

$$\vee \cos x=0 \vee \sin x-1=0$$

$$\Longleftrightarrow \left(\sin 2x=1 \Longleftrightarrow x_k=\frac{k\pi}{2}\right) \vee \left(\cos x=0 \Longleftrightarrow x_n=n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vee \left(\sin x=1 \Longleftrightarrow x_m=2m\pi+\frac{\pi}{2}\right) \quad (k,n,m=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

Primetimo da skup rešenja x_n obuhvata skup rešenja x_m.

1751. Data jednačina ekvivalentna je sa:

$$\frac{\sin^3 x(\sin x+\cos x)}{\sin x}+\frac{\cos^3 x(\sin x+\cos x)}{\cos x}=\cos 2x$$

$$\Longleftrightarrow (\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$\Longleftrightarrow (\sin x+\cos x)(1+\sin x-\cos x)=0$$

$$\Longleftrightarrow \sin x+\cos x=0 \vee \sin x-\cos x+1=0.$$

$$\sin x+\cos x=0 \Longleftrightarrow x_k=k\pi-\frac{\pi}{4}, \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

$$\cos x-\sin x=1 \Longleftrightarrow \left(x_n=2n\pi \vee x_m=2m\pi-\frac{\pi}{2}\right), \quad (n,m=\in\mathbb{Z}).$$

1752. Kako je $\sin^2 x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, data jednačina postaje:

$$\operatorname{tg}^3 x-2\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x-2=0 \Longleftrightarrow (\operatorname{tg} x-1)(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x+2)=0$$

$$\Longleftrightarrow (\operatorname{tg} x-1=0 \vee \operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x+2=0).$$

Jednačina
$$\operatorname{tg} x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$
a jednačina $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2 = 0$, nema realnih rešenja.

1753. Leva strana jednačine se transformiše u oblik
$$4\sin^2 x \cos x = 2\sin x \sin 2x = \cos x - \cos 3x.$$
Data jednačina ekvivalentna je jednačini
$$\cos x - \cos 3x = \cos x - \sin x \Longleftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\Longleftrightarrow 3x \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2k\pi \Longleftrightarrow x_k = k\pi - \frac{\pi}{4} \vee x_n = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (k, n \in \mathbb{Z}).$$

1754. Pošto je $\cos^2(1-3x) = \dfrac{1+\cos(2x-6x)}{2}$, data jednačina ekvivalentna je jednačini
$$4\cos^2(2-6x) + 8\cos(2-6x) - 5 = 0.$$
Njena rešenja su $x_k = \dfrac{1}{3} \pm \dfrac{\pi}{18} - \dfrac{k\pi}{3}$, $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1755. Data jednačina ekvivalentna je jednačini
$$\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right)$$
$$\Longleftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{x}{2}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right).$$
Kako je $\cos\left(\dfrac{\pi}{5} + \dfrac{x}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{x}{2}\right)$, prethodna jednačina ekvivalentna je
$$\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right)\left(2\sin\left(x - \frac{\pi}{10}\right) - 1\right) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = 0 \vee \sin\left(x - \frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{2},$$
pa je
$$x_m = \frac{10m+3}{5}\pi \vee x_n = \frac{30n+4}{15}\pi \vee x_k = \frac{30k+14}{15}\pi \quad (m, n, k \in \mathbb{Z}).$$

1756. Ako podelimo datu jednačinu sa $\cos^2 x \neq 0$, ona postaje
$$5\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 2 = 0,$$

odakle sledi
$$\left(\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x_k = k \cdot \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$$
$$\vee \left(\operatorname{tg} x = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = -\operatorname{arctg}\frac{2}{5} + n\pi \ (k, n \in \mathbb{Z})\right).$$

1757. Kako je $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, data jednačina je homogena i svodi se na oblik $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$, odakle izlazi
$$\operatorname{tg} x = 1 \Longleftrightarrow x_k = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$
$$\operatorname{tg} x = -3 \Longleftrightarrow x_n = n\pi - \operatorname{arctg} 3, \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

1758. Ako se primeni identitet $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ data jednačina je homogena i svodi se na oblik
$$\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x_k = k\pi \vee x_n = \frac{\pi}{3}(3n-1), \quad (k, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

1759. $x_k = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \vee x_n = -\operatorname{arctg} 5 + n\pi$, $(k, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1760. Kako je $2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$ data jednačina postaje homogena.
$$x_k = k\pi + \frac{\pi}{4} \vee x_n = n\pi - \operatorname{arctg}\frac{7}{4}, \quad (n, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

1761. $x_k = \dfrac{\pi}{4}(4k+1) \vee x_n = n\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}$, $(k, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1762. $x_k = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \vee x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{4}$, $(k, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1763. $x_k = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \vee x_n = n\pi + \operatorname{arctg} 3$, $(k, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

1764. Primedba 1. Data jednačina je oblika
$$A\sin x + B\cos x = C. \tag{1}$$
Leva strana jednačine (1) može se napisati u obliku $a\sin(x+\varphi)$, gde su a i φ nepoznati parametri koje treba odrediti iz
$$A\sin x + B\cos x = a\sin(x+\varphi). \tag{2}$$
Jednakost (2) može se napisati u obliku
$$A\sin x + B\cos x = a\cos\varphi\sin x + a\sin\varphi\cos x. \tag{3}$$

Da bi (3) bilo ispunjeno za svako x, treba da je

(4) $$A = a\cos\varphi, \quad B = a\sin\varphi.$$

Zbir kvadrata jednačine sistema (4) daje formulu za određivanje parametra a

(5) $$a = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Količnik jednačina sistema (5) daje formulu za izračunavanje parametra φ.

(6) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A}.$$

I način. Data jednačina može se rešiti na osnovu primedbe 1. Za datu jednačinu iz (5) sledi $a = \sqrt{1 + (-3)^2} = 2$, a iz (6) $\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}$. Data jednačina na osnovu (1) i (2) ekvivalentna je jednačini

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \iff x = \frac{5\pi}{6}, \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

Primedba 2. Pri rešavanju nekih problema iz trigonometrije često se $\sin x$ i $\cos x$ izražavaju pomoću $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ i to:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Ako se uvede da je $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, prethodni obrasci postaju

(1) $$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2},$$

(2) $$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

II način. Ako se iskoristi primedba 2 i prethodne formule (1) i (2), data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\frac{2t}{1 + t^2} - \frac{\sqrt{3}(1 - t^2)}{1 + t^2} = 2 \iff (2 + \sqrt{3})t^2 - 2t + 2 + \sqrt{3} = 0,$$

odakle je $t = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$. Smenom $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ imamo

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{(2 - \sqrt{3})^2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{5\pi}{6}}{1 + \cos\frac{5\pi}{6}}},$$

odakle sledi da je $x_k = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

III način. Kako je $\sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$, data jednačina ekvivalentna je jednačini:

$$\sin x\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cos x = 2\cos\frac{\pi}{3} \iff \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$
$$\iff x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff x_k = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

1765. Analogno prethodnom zadatku (primedba 2) dobijaju se rešenja: $x_k = 2k\pi - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13} - 2}{9} \vee x_n = 2k\pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13} + 2}{9}$, $(k, n \in \mathbb{Z})$.

1766. Deljenjem date jednačine sa 2 dobija se $\sin(x - 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, odakle je

$$x - 30^\circ = 45^\circ + 360^\circ k \Rightarrow x_k = 75^\circ + 360^\circ \cdot k \quad \text{ili}$$
$$x - 30^\circ = 135^\circ + 360^\circ \cdot n \Rightarrow x_n = 165^\circ + 360^\circ \cdot n \quad (k, n \in \mathbb{Z}).$$

1767. Analogno prethodnom zadatku data jednačina se svodi na oblik

$$\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

odakle sledi

$$x_k = \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{2} \vee x_n = \frac{\pi}{48} + \frac{n\pi}{2}, \quad (k, n \in \mathbb{Z}).$$

1768. $x_k = 2k\pi - \frac{7\pi}{12} \vee x_n = 2n\pi + \frac{11\pi}{12}$.

1769. $x_k = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \vee x_n = 2n\pi$, $(k, n \in \mathbb{Z})$.

1770. $x_k = 2k\pi + \dfrac{5\pi}{12} \vee x_n = (2n+1)\pi + \dfrac{\pi}{12}$.

1771. $x_k = \dfrac{(8k+1)\pi}{12} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

1772. $x_k = 2k\pi - \dfrac{\pi}{6} \vee x_n = 2n\pi - \dfrac{\pi}{2}$, $(k, n \in \mathbb{Z})$.

1773. Neka je $\sin x + \cos x = z$. Tada je $5z^2 - 12z + 7 = 0$, odakle je $z_1 = 1$, $z_2 = \dfrac{7}{5}$. Dakle,

$$\sin x + \cos x = 1 \quad \text{i} \quad \sin x + \cos x = \frac{7}{5}.$$

$$x_k = 2k\pi \vee x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \vee x_m = 2m\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$

$$\vee x_p = 2p\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} \quad (k, n, m, p \in \mathbb{Z}).$$

1774. Kako je $\left|\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}\right| = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$, onda je $\left|\dfrac{2}{\sin 2x}\right| = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

1° Ako je $\sin 2x \geq 0$, imamo

$$\frac{2}{\sin 2x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Longleftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

odakle sledi

$$2x = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} \Longleftrightarrow x_k = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2° Ako je $\sin 2x < 0$, tada je $-\dfrac{2}{\sin 2x} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \Longleftrightarrow \sin 2x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, odakle je

$$2x = n\pi - (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} \Longleftrightarrow x_n = \frac{n\pi}{2} - (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

1775. Ako se pomnoži data jednačina sa $\dfrac{1}{2}$, onda se može napisati u obliku

$$\frac{1}{2}\cos 7x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\sin 5x, \text{ ili}$$

$$\sin\frac{\pi}{6}\cos 7x + \cos\frac{\pi}{6}\sin 7x = \sin\frac{\pi}{3}\cos 5x + \cos\frac{\pi}{3}\sin 5x, \text{ tj.}$$

$$\sin\left(7x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Odatle

$$7x + \frac{\pi}{6} - 5x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi \quad \text{ili} \quad 7x + \frac{\pi}{6} + 5x + \frac{\pi}{3} = (2k+1)\pi.$$

$$x_k = (12k+1)\frac{\pi}{12} \vee x_n = (4n+1)\frac{\pi}{24} \quad (k, n \in \mathbb{Z}).$$

1776. Ako se pomnoži data jednačina sa $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, onda se može napisati u obliku $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(\pi\log x) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(\pi\log x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ili $\cos\left(\pi\log x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, a odatle $\pi\log x - \dfrac{\pi}{4} = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \Longleftrightarrow x_k = 10^{2k} \vee x_n = 10^{2n+\frac{1}{2}} \quad (k, n \in \mathbb{Z})$.

1777. Kako je $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$, tada je $\log_{\cos x}\sin x + \dfrac{1}{\log_{\cos x}\sin x} - 2 = 0$ ili

$$(\log_{\cos x}\sin x)^2 - 2\log_{\cos x}\sin x + 1 = 0, \quad \text{tj.}$$

$$(\log_{\cos x}\sin x - 1)^2 = 0 \Longleftrightarrow \log_{\cos x}\sin x = 1 \Longleftrightarrow \sin x = \cos x$$

$$\Longleftrightarrow x_k = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

jer mora biti ispunjen uslov $\sin x > 0$ i $\cos x < 0$.

1778. a) Leva strana date jednačine može se transformisati u oblik

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x,$$

pa je $1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x = a$, odakle je

$$\sin^2 2x = \frac{4(1-a)}{3} \quad \text{ili} \quad \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{4(1-a)}{3},$$

tj. $\cos 4x = \dfrac{8a-5}{3}$.

Potreban i dovoljan uslov za egzistenciju realnih rešenja date jednačine je nejednačina $-1 \leq \dfrac{8a-5}{3} \leq 1$, odakle je $\dfrac{1}{4} \leq a \leq 1$.

b) Za $a = 1$, $x_k = \dfrac{k\pi}{2}$, a ako je $a = \dfrac{1}{4}$, $x_n = \dfrac{n\pi}{2} \pm \dfrac{\pi}{4} \quad (n, k \in \mathbb{Z})$.

1779. Kako je $a = a(\sin^2 x + \cos^2 x)$, data jednačina postaje

$$(1) \qquad (1-a)\sin^2 x - \sin x\cos x - (a+2)\cos^2 x = 0.$$

Neka je $a \neq 1$, tada iz (1) sledi da je $\cos x \neq 0$.

U suprotnom slučaju mi bismo imali $\sin x = \cos x = 0$, što je nemoguće. Ako podelimo jednačinu (1) sa $\cos^2 x$ i uvedemo smenu $\operatorname{tg} x = t$, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$(2) \qquad (1-a)t^2 - t - (a+2) = 0.$$

Jednačina (1) ima rešenje ukoliko jednačina (2) ima realna rešenja, tj.:

$$D = -4a^2 - 4a + 9 \geq 0,$$

odakle nalazimo

$$-\frac{\sqrt{10}+1}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{10}-1}{2}.$$

Za $a = 1$ imamo $\sin x(\sin x + 3\cos x) = 0$, odakle

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x_n = n\pi - \operatorname{arctg} 3 \quad (k, n \in \mathbb{Z}).$$

1780. Pošto je

$$\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

zamenom $\cos 2x = t$, data jednačina postaje

$$(1) \qquad t^2 - 6t + 4a^2 - 3 = 0.$$

Data jednačina ima rešenja za one vrednosti parametra a, za koje koreni t_1 i t_2 jednačine (1) su realni i njihove apsolutne vrednosti ne prelaze 1.

Rešavanjem jednačine (1) nalazimo

$$t_1 = 3 - 2\sqrt{3-a^2}, \quad t_2 = 3 + 2\sqrt{3-a^2}.$$

Rešenja t_1 i t_2 jednačine (1) su realna, ako je

$$(2) \qquad |a| \leq 3.$$

Ako je uslov (2) ispunjen $t_2 > 1$ i zato ta vrednost ne dolazi u obzir. Radi toga, tražene vrednosti parametra a zadovoljavaju uslov (2) , za koji je $|t_1| \leq 1$, tj.

$$(3) \qquad -1 \leq 3 - 2\sqrt{3-a^2} \leq 1.$$

Iz (3) izlazi $-4 \leq -2\sqrt{3-a^2} \leq -2$, odakle

$$(4) \qquad 1 \leq \sqrt{3-a^2} \leq 2.$$

Pošto je nejednačina $\sqrt{3-a^2} \leq 2$ zadovoljena za $|a| \leq \sqrt{3}$, sistem jednačina (4) svodi se na nejednačinu $\sqrt{3-a^2} \geq 1$, odakle nalazimo $|a| \leq \sqrt{2}$.

Dakle, data jednačina ima rešenja za $|a| \leq \sqrt{2}$ i to

$$x_k = \pm\frac{1}{2}\arccos(3 - 2\sqrt{3-a^2}) + k\pi.$$

1781. Kako ugao $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tada je $\lambda > 0$, jer je $\sin x > 0$ i $\cos x > 0$, pa data jednačina, posle kvadriranja, postaje

$$1 + 2\sin x\cos x = \lambda^2 \sin^2 x \cos^2 x.$$

Smenom $\sin 2x = t$ imamo $\lambda^2 t^2 - 4t - 4 = 0$, odakle dobijamo

$$(1) \qquad t_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2}.$$

Pošto $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tada $\sin 2x > 0$, pa u jednačini (1) treba uzeti znak plus, tj. $t = \dfrac{2+\sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2}$.

Tražene vrednosti parametra su rešenja nejednačine $\dfrac{2+\sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2} \leq 1$, odakle nalazimo $\lambda \geq 2\sqrt{2}$.

1782. Proizvod u datoj jednačini transformišemo u zbir

$$\frac{1}{2}\left(\cos 2mx + \cos\frac{\pi}{3}\right) = a \quad \text{ili} \quad \cos 2mx = \frac{4a-1}{2}.$$

Dovoljan i potreban uslov za egzistenciju rešenja date jednačine je nejednačina $-1 \leq \dfrac{4a-1}{2} \leq 1$, odakle $-\dfrac{1}{4} \leq a \leq \dfrac{3}{4}$.

1783. Pošto je $|\sin x| \leq 1$, proizvod dva sinusa jednak je jedinici, ako je

1° $\sin 2x = 1$ i $\sin 6x = 1$;

2° $\sin 2x = -1$ i $\sin 6x = -1$.

Analizirajmo slučaj 1°. Imamo $x_k = \dfrac{(4k+1)\pi}{4}$ i $x_n = \dfrac{(4n+1)\pi}{12}$.

Ako izjednačimo nađene vrednosti x, imamo

$$\frac{(4k+1)\pi}{4} = \frac{(4n+1)\pi}{12},$$

odakle je $6k = 2n - 1$.

Paran broj ne može biti jednak neparnom, pa je tvrđenje 1° nemoguće. Analogno se pokazuje da je i 2° nemoguće.

1784. Kako je

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x + \sin 2x + a = 0 \quad \text{ili}$$
$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \sin 2x + a = 0, \quad \text{tj.} \quad \sin^2 2x - 2\sin 2x - 2(a+1) = 0,$$

odakle $\sin 2x = 1 \pm \sqrt{2a+3}$. Za realnost rešenja neophodno je $2a+3 \ge 0$ ili $a \ge -\frac{3}{2}$. Kako je $|\sin 2x| < 1$, tada $|1 \pm \sqrt{2a+3}| \le 1$.
Analizirajmo odvojeno poslednje nejednačine:
1° $|1 - \sqrt{2a+3}| \ge -1$, odakle je $-\frac{3}{2} \le a \le \frac{1}{2}$. U ovom slučaju

$$\sin 2x = 1 - \sqrt{2a+3} \Rightarrow x_k = \frac{\pi k}{2} + \frac{(-1)^k}{2}\arcsin(1 - \sqrt{2}a + 3).$$

2° $|1 - \sqrt{2a+3}| \le 1$, no kako je sa druge strane $1 - \sqrt{2a+3} \le 1$, tada je $\sqrt{2a+3} = 0$, tj. $a = -\frac{3}{2}$, pa je $\sin 2x = 1$.
Rešenje ove jednačine je sadržano u rešenju 1°.

1785. Kako je

$$\frac{1}{2}\big(\cos(b-c)x - \cos(b+c)x\big) = \frac{1 - \cos(b+c)x}{2} + a \quad \text{ili}$$
$$\cos(b-c) - \cos(b+c)x = 1 - \cos(b+c)x + 2a, \quad \text{tj.}$$
$$\cos(b-c)x = 2a + 1.$$

Potreban i dovoljan uslov za egzistenciju rešenja je $-1 \le 2a+1 \le 1$ ili $-2 \le 2a \le 0$, odakle je $-1 \le a \le 0$.

1786. Leva strana jednačine transformiše se u oblik

$$\frac{1+\cos(2x+2\alpha)}{2} + \frac{1+\cos(2x-2\alpha)}{2} = \sin 2\alpha \quad \text{ili}$$
$$\cos(2x+2\alpha) + \cos(2x-2\alpha) = 2\sin 2\alpha - 2, \quad \text{tj.}$$
$$2\cos 2x\cos 2\alpha = 2(\sin 2\alpha - 1).$$

Ako je $\cos 2\alpha \ne 0$, tj. ako je $\alpha \ne \pm\frac{\pi}{4}$, poslednja jednačina postaje

$$\cos 2x = \frac{\sin 2\alpha - 1}{\cos 2\alpha} = \frac{1 - \sin 2\alpha}{-\cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$
$$\frac{2\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right), \text{ tj.}$$

(1) $$\cos 2x = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Kako je $-1 \le \cos 2x \le 1$, tada je $-1 \le \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \le 1$ ili

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \le \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \le \operatorname{tg}\frac{\pi}{4},$$

odakle je

$$-\frac{\pi}{4} < \alpha - \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4} \quad \text{tj.} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}.$$

Dakle dobijeni interval zadovoljava pretpostavku $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
Iz (1) imamo

$$2x = \pm\arccos\left(\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right) + 2k\pi,$$
$$x_k = \pm 0,5\arccos\left(\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

1787. Napišimo datu jednačinu u obliku

$$\sin(2x+x) + \sin 2x - m\sin x = 0 \quad \text{ili}$$
$$2\sin x\cos^2 x + \sin x\cos 2x + 2\sin x\cos x - m\sin x = 0, \quad \text{tj.}$$
$$\sin x(4\cos^2 x + 2\cos x - m - 1) = 0,$$

odakle izlazi:

(1) $$\sin x = 0,$$

(2) $$\cos x = \frac{-1 + \sqrt{4m+5}}{4},$$

(3) $$\cos x = \frac{-1 - \sqrt{4m+5}}{4}.$$

Iz (1) nalazimo $x_k = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Rešenja jednačine (2) i (3) su realna, ako je $4m+5 \geq 0$, tj. $m \geq -\dfrac{5}{4}$; da bi jednačina (3) imala rešenja neophodno je da je

$$\left|\frac{-1+\sqrt{4m+5}}{4}\right| \leq 1 \tag{4}$$

a za egzistenciju rešenja jednačine (4) neophodno je

$$\left|\frac{-1-\sqrt{4m+5}}{4}\right| \leq 1 \tag{5}$$

Iz (4) imamo $|-1+\sqrt{4m+5}| \leq 4$ ili

$$-4 \leq -1+\sqrt{4m+5} \leq 4 \quad \text{tj.} \quad -3 \leq \sqrt{4m+5} \leq 5,$$

odakle je $m \leq 5$.
Iz (5) imamo $-4 \leq -1-\sqrt{4m+5} \leq 4$ odakle $m \leq 1$.
Dakle, $x_k = k\pi$, za ma koje m.
$x_n = 2n\pi \pm \arccos\dfrac{-1+\sqrt{4m+5}}{4}$, ako je $-\dfrac{5}{4} < m < 5$.
$x_n = 2n\pi \pm \arccos\dfrac{-1-\sqrt{4m+5}}{4}$, ako je $-\dfrac{5}{4} \leq m \leq 1$.

1788. $m \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$.

1789. $x_k = k\pi$, za svako m, $x_n = (-1)^n \cdot \arcsin\sqrt{\dfrac{3-m}{4}} + 2n\pi$, $x_\ell = \pi - (-1)^\ell \arcsin\sqrt{\dfrac{3-m}{4}} + 2\ell\pi$ za $-1 \leq m \leq 3$, $(k, n, \ell \in \mathbb{Z})$.

1790. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\sin x = 0 \vee 4\sin^2 x + m\sin x - 3 = 0.$$

Prva jednačina je ispunjena za $x_k = k\pi$. Druga jednačina ima jedno rešenje za $\sin x$, ako je $m < -1$ i $m > 1$, a dva rešenja, ako je $-1 \leq m \leq 1$.

1791. $x_k = (2k+1)\pi$; $\quad x_n = 2\pi\left(2n \pm \dfrac{1}{3}\right)$ $(k, n \in \mathbb{Z})$.

1792. Data jednačina ekvivalentna je sistemima

$$\cos x \geq 0 \wedge 3\cos x = \cos x - 5 \tag{1}$$
$$\cos x \leq 0 \wedge 3\cos x = -\cos x - 4. \tag{2}$$

Iz sistema (1) $\cos x = -\dfrac{5}{2}$, a $\left|-\dfrac{5}{2}\right| > 1$, pa rešenja nema.

Iz sistema (2) $\cos x = -\dfrac{5}{4}$, a $\left|-\dfrac{5}{4}\right| > 1$, pa i u ovom slučaju rešenja nema.

1793. Dato je $x^2 = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ odakle sledi: za $k = 0$,

$$x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{3}}; \quad k = 1, 2, 3, \ldots \quad x = \pm\sqrt{2k \pm \frac{\pi}{3}}.$$

1794. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\sqrt{49 - x^2} = 2k\pi \Longleftrightarrow 49 - x^2 = 4\pi^2 k^2.$$

Ova jednačina ima realna rešenja za $k = 0$ i $k = 1$, tj.

$$x_{1/2} = \pm 7, \quad x_{3/4} = \pm\sqrt{49 - 4\pi^2}.$$

1795. Pošto je

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(x^2 + \frac{\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(x^2 - \frac{\pi}{6}\right) &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)\right) \cdot \operatorname{tg}\left(x^2 - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right) \cdot \operatorname{tg}\left(x^2 - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg}\left(x^2 - \frac{\pi}{3}\right) = -1, \end{aligned}$$

tj. leva strana date jednačine -1, a desna 2, što je zaista nemoguće.

1796. Napišimo datu jednačinu u obliku $\operatorname{tg}(x^2 - x) = \operatorname{tg} 2$, odakle je

$$x^2 - x - 2 = k\pi \quad \text{ili} \quad x^2 - x - (2 + k\pi) = 0,$$

tj. $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{4k\pi + 9}}{2}$.

Uslov za egzistenciju rešenja je $4k\pi + 9 \geq 0$, ili $k \geq \dfrac{9}{4\pi}$. Pošto k mora biti ceo broj i $k > -1$, tj. $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{4k\pi + 9}}{2}$, gde je $k = 0, 1, 2, \ldots$

1797. Kako je $\cos|x| = \cos x$ i $\operatorname{tg}^2|x| = \operatorname{tg}^2 x$, data jednačina se može napisati u obliku

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2|x| = \frac{1 - \cos|x|}{1 - \sin|x|} &\Longleftrightarrow \frac{\sin^2|x|}{\cos^2|x|} = \frac{1 - \cos|x|}{1 - \sin|x|} \\ &\Longleftrightarrow \frac{1 - \cos^2|x|}{1 - \sin^2|x|} = \frac{1 - \cos|x|}{1 - \sin|x|}. \end{aligned}$$

Ako pomnožimo obe strane ove jednačine sa $1-\sin|x| \neq 0$ tada je

$$\frac{1-\cos^2|x|}{1-\sin|x|} = 1-\cos|x| \iff (1-\cos|x|)(\cos|x|-\sin|x|) = 0.$$

Ova jednačina ekvivalentna je disjunkciji

$$(1-\cos|x| = 0 \iff \cos|x| = 1 \iff x_k = 2k\pi)$$
$$\vee \left(\cos|x| - \sin|x| = 0 \iff \operatorname{tg}|x| = 1 \iff x_n = \frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right) \quad (k,n\in\mathbb{Z}).$$

1798. Iz date jednačine dobija se $\pi x^2 \pm 2\pi x = 2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ ili $x^2\pm 2x-2k=0$, odakle je $x = \mp 1 \mp \sqrt{2k+1}$. Uslov egzistencije rešenja je $2k+1\geq 0$, ili $k\geq 0$. Da bi x bio ceo broj, neophodno je da broj $\sqrt{2k+1}$ bude ceo. Kako je kvadratni koren iz potpunog kvadrata neparnog broja, neparan broj, to je broj $\mp1\mp\sqrt{2k+1}$ paran broj.

1799. Pošto je $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ i $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, tada je

$$\operatorname{tg} x = \frac{9\sin^2 x + 6\sin x\cos x + \cos^2 x}{9\cos^2 x + 6\sin x\cos x + \sin^2 x} = 0$$
$$\iff \operatorname{tg} x - \frac{(3\sin x+\cos x)^2}{(3\cos x+\sin x)^2} = 0 \iff \operatorname{tg} x - \left(\frac{3\operatorname{tg} x+1}{3+\operatorname{tg} x}\right)^2 = 0$$
$$\iff \operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 1 = 0 \iff (\operatorname{tg} x-1)^3 = 0 \iff \operatorname{tg} x = 1$$
$$\iff x_k = \frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

1800. Data jednačina može se napisati u obliku

$$\begin{aligned}
&(\sin 2x+3)\sin^2 x(\sin^2 x-1)+1=0\\
&\iff (\sin 2x+3)\sin^2 x\cos^2 x - 1 = 0\\
&\iff (\sin 2x+3)4\sin^2 x\cos^2 x - 4 = 0\\
&\iff (\sin 2x+3)\sin^2 2x - 4 = 0\\
&\iff \sin^3 2x + 3\sin^2 2x - 4 = 0\\
&\iff (\sin 2x-1)(\sin 2x+2)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Pošto je $(\sin 2x+1)^2 > 0$ za svako x, onda je $\sin 2x - 1 = 0$, tj. $x_k = \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

1801. Data jednačina se može transformisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}
&\frac{1-\cos 2x^2}{2}+\frac{1-\cos 4x^2}{2} = \frac{1-\cos 6x^2}{2}+\frac{1-\cos 8x^2}{2}\\
&\iff \cos 2x^2+\cos 4x^2 = \cos 6x^2+\cos 8x^2\\
&\iff \cos 3x^2\cos x^2 - \cos 7x^2\cos x^2 = 0\\
(1)\qquad &\iff \cos x^2\sin 2x^2\sin 5x^2 = 0.
\end{aligned}$$

Jednačina (1) ekvivalentna je disjunkciji

$$\left(\cos x^2 = 0 \iff x_k^2 = \frac{2k+1}{2}\pi\right) \vee \left(\sin 2x^2 = 0 \iff x_n^2 = \frac{n\pi}{2}\right)$$
$$\vee \left(\sin 5x^2 = 0 \iff x_m^2 = \frac{m\pi}{5}\right).$$

Pošto je $x^2\geq 0$, onda $(k,n,m=0,1,2,\ldots)$ za $n=2\ell+1$, $x_n^2 = \frac{2\ell+1}{2}\pi = x_\ell^2$. Sva rešenja date jednačine su

$$x_k = \sqrt{\frac{2k+1}{2}\pi} \quad\text{i}\quad x_m = \sqrt{\frac{m\pi}{5}}, \quad (k,m=0,1,2,\ldots).$$

1802. Ako proizvode na levoj strani date jednačine transformišemo u zbir, dobijamo $\cos 7x - \cos x = 0$ ili $\sin 4x\sin 3x = 0$, odakle je:

$$x_k = \frac{k\pi}{4} \vee x_n = \frac{n\pi}{3}, \quad (k,n=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

1803. $x_k = \frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$, $x_n = \frac{5\pi}{24}+\frac{n\pi}{2}$ $(k,n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

1804. Data jednačina se transformiše u oblik

$$\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2}-3\sin^2\frac{x}{2}\right)=0.$$

Odatle sledi: $x_k = 2k\pi$, $x_n = \frac{3\pi}{2}+2n\pi$, $x_m = \pm\frac{\pi}{3}+2m\pi$ $(k,n,m\in\mathbb{Z})$.

1805. $x_k = \frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi$, $x_n = 4n\pi$ $(k,n\in\mathbb{Z})$.

1806. $x_k = \frac{2}{3}\pi+2k\pi$, $x_n = 2n\pi$ $(k,n\in\mathbb{Z})$.

1807. Data jednačina se može napisati u obliku

$$2\sin 3x\cos x+\sqrt{3}\sin 3x=0.$$

Odatle sledi:

$$\sin 3x=0\Longleftrightarrow x_k=\frac{k\pi}{3},\quad \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Longleftrightarrow x_n=\pm\frac{5\pi}{6}+2n\pi\quad (k,n\in\mathbb{Z}).$$

1808. Data jednačina se svodi na:

$$(\cos x+\sin x)^2(\cos x-\sin x)=-\cos 2x$$
$$\Longleftrightarrow (\cos x+\sin x)(\cos^2 x-\sin^2 x)=-\cos 2x$$
$$\Longleftrightarrow \cos 2x(\cos x+\sin x+1)=0\Longleftrightarrow\left(\cos 2x=0\Longleftrightarrow x_k=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)$$
$$\vee\Bigg(\cos x+\sin x+1=0\Longleftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}=0$$
$$\Longleftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=0\Longleftrightarrow x_n=\pi+2n\pi\vee x_m=\frac{3\pi}{2}+2m\pi\Bigg)$$
$$(k,n,m=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

1809. Da bi data jednačina bila određena neophodno je: $x\neq\frac{k\pi}{2}$ $(k=\in\mathbb{Z})$. Njena rešenja su: $x_n=\frac{\pi}{4}+n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$.

1810. Ako je $\sin 2x\geq 0$, tada je $1+\sin 2x\geq 1$, a $1-\sin x\leq 1$. Onda je data jednačina ekvivalentna jednačini

$$-\log_{\frac{1}{3}}(1+\sin 2x)+\log_{\frac{1}{3}}(1-\sin 2x)=1.$$

Antilogaritmovanjem se dobija $\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}=\frac{1}{3}$, odakle je:

$$\sin 2x=\frac{1}{2}\Longleftrightarrow x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}.$$

Analogno, ako je $\sin 2x<0$, tada je $1+\sin 2x<1$, a $1-2\sin 2x>1$, pa se data jednačina svodi na oblik

$$\log_{\frac{1}{3}}(1+\sin 2x)-\log_{\frac{1}{3}}(1-\sin 2x)=1,$$

odakle nalazimo: $\sin 2x=-\frac{1}{2}\Longleftrightarrow x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$.

1811. Pošto je $\sin^2 3x=\frac{1-\cos 6x}{2}$, data jednačina ekvivalentna je jednačini $2\cdot 2^{2\cos 6x}+\frac{4}{2^{2\cos 6x}}=9$. Smena $2^{2\cos 6x}=t$ svodi poslednju jednačinu na kvadratnu $2t^2-9t+4=0$. Rešenja date jednačine su

$$x_k=\frac{k\pi}{3}\vee x_n=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{n\pi}{3}\quad (k,n\in\mathbb{Z}).$$

1812. $x_k=(-1)^k\frac{\pi}{3}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

1813. Da bi data jednačina imala smisla mora da važi: $\operatorname{tg}x>0\wedge\operatorname{tg}2x>0$, pa je ona ekvivalentna $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x=1$. Postavljeni uslov zadovoljava samo rešenje

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}\Longleftrightarrow x_k=\frac{\pi}{6}+k\pi\quad (k\in\mathbb{Z}).$$

1814. Pošto je

$$\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right),$$

data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)-5=\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right).$$

Iz ove jednačine dobijamo

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=-1\Longleftrightarrow x=\frac{7\pi}{12}+k\pi\quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Drugo rešenje ne odgovara.

1815. Data jednačina je ekvivalentna sa:

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=3+2\sin 2x\Longleftrightarrow\frac{2}{\sin 2x}=3+2\sin 2x$$
$$\Longleftrightarrow 2\sin^2 2x+3\sin 2x-2=0\Longleftrightarrow\left(\sin 2x=\frac{1}{2}\vee\sin 2x=-2\right)$$
$$\left(x_n=\frac{\pi}{12}+n\pi\vee x_k=\frac{5\pi}{12}+k\pi\right),$$

gde su k i n celi brojevi. Jednačina $\sin 2x=-2$ nema rešenja.

1816. Jednačina ima smisla ako je $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k ceo broj) i tada je ekvivalentna jednačini

$$\begin{aligned}
&(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2 = \cos x + \sin x \\
&\iff (\cos^2 x - \sin^2 x - 1)(\cos x + \sin x) = 0 \\
&\iff \cos x + \sin x = 0 \vee \cos^2 x - \sin^2 x - 1 = 0 \\
&\iff \operatorname{tg} x = -1 \vee \cos 2x = 1 \iff x = -\frac{\pi}{4} + m\pi \vee x = n\pi
\end{aligned}$$

(n i m celi brojevi) .

1817. $x = \frac{(-1)^k \pi}{24} + \frac{k\pi}{4}$ (k ceo broj) .

1818. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\begin{aligned}
&(2\cos 3x + 4\cos x - 1)\log\cos 2x = -\log\cos 2x \\
&\iff 2(\cos 3x + 2\cos x)\log\cos 2x = 0 \\
&\iff \cos 2x = 1 \vee \cos 3x + 2\cos x = 0 \\
&\iff (2x_k = 2k\pi) \vee \cos x(4\cos^2 x - 1) = 0 \\
&\iff (x_k = k\pi) \vee \left(\cos x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = -\frac{1}{2}\right) \\
&\iff x_k = k\pi \vee x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \vee x_m = \pm\frac{\pi}{3} + 2m\pi \vee x_\ell = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi
\end{aligned}$$

$(k, n, m, \ell \in \mathbb{Z})$. Zbog uslova $\cos 2x > 0$ otpadaju rešenja x_n, x_m i x_ℓ.

1819. Smena $3^{\sin^2 x} = t$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

1820. $x = k\pi \vee x = \frac{2n\pi}{3}$ $(k, n \in \mathbb{Z})$.

1821. $x_k = -\frac{5\pi}{16} + 2k\pi$, $x_\ell = \frac{15\pi}{16} + 2\ell\pi$, $x_m = \frac{3\pi}{16} + 2m\pi$, $x_n = \frac{23\pi}{16} + 2n\pi$ $(k, \ell, m, n \in \mathbb{Z})$.

1822. $x_k = k \vee x_\ell = \frac{-1 \pm \sqrt{4\ell + 3}}{2}$ $(k, \ell \in \mathbb{Z})$.

1823. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\cos(\pi \operatorname{tg} x + \pi \operatorname{ctg} x) = 0$$

$$(1) \qquad \iff \pi \operatorname{tg} x + \pi \operatorname{ctg} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ova jednačina ima rešenja ako su ispunjeni uslovi $x \neq p\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2} + 2q\pi$, $\pi \operatorname{tg} x \neq \frac{\pi}{2} + r\pi$, $\pi \operatorname{ctg} x \neq s\pi$ $(p, q, r, s \in \mathbb{Z})$.
Smenom $\operatorname{tg} x = t$, jednačina (1) postaje kvadratna po t,

$$t^2 - \left(\frac{1}{2} + k\right)t + 1 = 0.$$

Rešenja date jednačine su:

$$c = \operatorname{arctg}\frac{1 + 2k \pm \sqrt{(1+2k)^2 - 16}}{4} + n\pi$$

gde je n ceo broj, a k takođe ceo broj ($k \neq -2, -1, 0, 1, 2$) i $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + m\pi$, $(m \in \mathbb{Z})$.

1824. Smenom $\cos x - \sin x = t$, dobija se jednačina

$$\sqrt{1 - t - t^2} = t \iff 2t^2 + t - 1 = 0 \wedge t > 0.$$

Rešenje date jednačine je $x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

1825. Data jednačina je ekvivalentna jednačini

$$1 - \cos 2x + \sin 2x - (\sin x + \cos x) = 0.$$

Primenom identiteta

$$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x, \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

prethodna jednačina je ekvivalentna jednačini

$$2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\sin x + \cos x) = 0.$$

Rešenja ove jednačine su:

$$x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad x = -\frac{\pi}{4} + n\pi \quad (n, k \in \mathbb{Z}).$$

1826. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\begin{aligned}
&(\sin x + \cos x - 1)(1 - \sin x\cos x) = 1 - \sin x\cos x \\
&\iff (\sin x + \cos x - 1)(\sin x\cos x - 1) = 0 \\
&\iff \sin 2x = 2 \vee \sin x + \cos x - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Jednačina $\sin 2x = 2$ nema realnih rešenja, a rešenja jednačine

$$\sin x + \cos x = 1 \text{ su } x_k = 2k\pi,\ x_m = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad (k, m \in \mathbb{Z}).$$

1827. a) Primenom identiteta $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ i

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)),$$

data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$(\sin x - 1)(3 - 4\sin^2 x) = 0 \iff \left(\sin x = 1 \vee \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\iff x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x_n = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + n\pi \vee x_m = (-1)^m\frac{\pi}{3} + m\pi$$

b) $x_k = 2k\pi \vee x_n = \pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi \vee x_m = \pm\frac{5\pi}{6} + 2m\pi \quad (k, n, m \in \mathbb{Z}).$

1828. $x = \arccos\left(\pm\frac{1}{4}\sqrt{2(-1+\sqrt{17})}\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

1829. $x = \pm\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

1830. Jednačina je ekvivalentna sistemu

$$5\sin 2x - 2 = (\sin x - \cos x)^2 \sin x \geq \cos x.$$

Rezultat:

$$x_n = \frac{13\pi}{12} + 2n\pi, \quad x_k = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \quad (n, k \in \mathbb{Z}).$$

1831. Smenom $\sin(\pi(13x+9)^2) = y$ data jednačina se svodi na kvadratnu $2y^2 - 5y + 3 = 0$.

$$x_n = \frac{9}{13} \pm \frac{1}{13}\sqrt{0,5 + 2n\pi} \quad (n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0).$$

1832. $x = 105^\circ$. **1833.** $x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

1834. Smena $\sqrt{\sin x} = t$, $t \geq 0$, $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

1835. $x_k = (-1)^k \arcsin\frac{5}{8} + k\pi$, $x_n = (-1)^n \arcsin\frac{1}{8} + n\pi$,

$x_m = (-1)^{m+1}\arcsin\frac{7}{8} + m\pi \quad (k, n, m \in \mathbb{Z}).$

1836. $x_k = \pm\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$ **1837.** $x_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

1838. Data jednačina ekvivalentna je sistemu

$$\cos 2x = \sin x \wedge \sin x + \cos\frac{x}{2} > 0.$$
$$x_k = \frac{\pi}{6} + 4k\pi, \quad x_n = \frac{5\pi}{6} + 4n\pi \quad (k, n \in \mathbb{Z}).$$

1839. Ako je $\sin x + \sin 2x > 0$, data jednačina je ekvivalentna jednačini $2x - 5 = 1$; odavde $x = 3$, međutim $\sin 3 + \sin 6 < 0$. Ako je $\sin x + \sin 2x < 0$, dobija se $x = 2$, međutim $\sin 2 + \sin 4 > 0$. Ostaje još slučaj $\sin x + \sin 2x = 0$, odakle se dobija da je

$$x_k = \frac{2k\pi}{3}, \quad x_n = \pi(2n+1) \quad (k, n \in \mathbb{Z}).$$

1840. $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_n = 2n\pi \quad (k, n \in \mathbb{Z}).$

1841. $x = -\log_2^3\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$

1842. Data jednačina se može prikazati u obliku:

$$\begin{aligned}
&\sin x + 2\sin x\cos x\cos a + 2\sin^2 x \sin a - \sin a = 0\\
&\iff \sin x + \sin 2x\cos a - \cos 2x \sin a = 0\\
&\iff \sin x + \sin(2x - a) = 0\\
&\iff 2\cos\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{3x-a}{2} = 0\\
&\iff \cos\frac{x-a}{2} = 0 \vee \sin\frac{3x-a}{2} = 0\\
&\iff x_k = (2k+1)\pi + a \vee x_n = \frac{2n\pi + a}{3} \quad (k, n \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

1843. Ako se proizvod sinusa transformiše u razliku kosinusa, data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$2c^2(\cos(B-A) - \cos(2x + A + B)) = a^2 + b^2 + 4ab.$$

Kako je trougao pravougli, važe jednakosti

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad A + B = \frac{\pi}{2}, \quad a = c\cos A, \quad b = c\sin A.$$

Poslednja jednačina je ekvivalentna jednačini

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2A\right)-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+2\sin A\cos A$$
$$\iff \sin 2A+\sin 2x=\frac{1}{2}+\sin 2A \iff \sin 2x=\frac{1}{2}$$
$$\iff x_m=\left(m+\frac{1}{12}\right)\pi,\quad x_n=\left(\frac{5}{12}+n\right)\pi\quad (n,m\in\mathbb{Z}).$$

1844. $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\quad (k\in\mathbb{Z})$.

1845. $-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}+k\pi\quad (k\in\mathbb{Z})$.

1846. $\left((-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\pm\dfrac{\pi}{3}+2\ell\pi\right)$;

$$\left((-1)^{k}\frac{\pi}{6}+k\pi,\pm\frac{2\pi}{3}+2\ell\pi\right)\quad (k,\ell\in\mathbb{Z}).$$

1847. $\left(-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\dfrac{2\pi}{3}+2n\pi\right);\quad\left(\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi;\dfrac{5\pi}{3}+2n\pi\right)\quad (k,n\in\mathbb{Z})$.

1848. $\left(\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)\quad (k,n\in\mathbb{Z})$.

1849. Ako jednačine datog sistema kvadriramo a zatim saberemo, dobijamo

$$\sin^2 y+3\cos^2 y=2\iff\cos^2 y=\frac{1}{2}.$$

Odavde je

$$\cos y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Iz sistema se dobija $\sin x=\pm\dfrac{1}{2}$, $\cos x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Sistem je zadovoljen za sledeće uređenje prave (x,y):

1° $\sin x=\dfrac{1}{2}$, $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff\left(\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\dfrac{\pi}{4}+2m\pi\right)$;

2° $\sin x=\dfrac{1}{2}$, $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff\left(\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\dfrac{3\pi}{4}+2m\pi\right)$;

3° $\sin x=-\dfrac{1}{2}$, $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff\left(-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,-\dfrac{\pi}{4}+2m\pi\right)$;

4° $\sin x=-\dfrac{1}{2}$, $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff\left(-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,-\dfrac{3\pi}{4}+2m\pi\right)\quad (k,m\in\mathbb{Z})$.

1850. $\left(\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\pm\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)+2n\pi\right)\quad (k,n\in\mathbb{Z})$.

1851. Ako je $\cos x\ne 0$, $\cos y\ne 0$, onda je

$$\operatorname{tg}(x+y)=1\iff x+y=\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

Rešenje sistema su parovi

$$\left(m\pi,\frac{\pi}{4}+(n-m)\pi\right);\quad\left(-\frac{3\pi}{4}+2p\pi,\ \pi(n-2p+1)\right)\quad (k,n,p\in\mathbb{Z}).$$

1852. Zbir i razlika jednačina sistema daju

$$\sin(x+y)=0\vee\sin(y-x)=1;$$
$$\left(\pi\left(\frac{n}{2}-k-\frac{1}{4}\right),\pi\left(\frac{n}{2}+k+\frac{1}{4}\right)\right)\quad (n,k\in\mathbb{Z}).$$

1853. $\left(\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\pm\dfrac{\pi}{3}+2n\pi\right)\quad (n,k\in\mathbb{Z})$.

1854. $\left(\dfrac{\pi}{2}+n\pi,-\dfrac{\pi}{2}+\pi(2k-n)\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi r,-\dfrac{\pi}{2}+2m\pi\right)$,

$\left(\dfrac{\pi}{6}+2r\pi,\dfrac{\pi}{6}+2\ell\pi\right)\quad (n,k,m,\ell\in\mathbb{Z})$.

1855. $\left(\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\dfrac{\pi}{3}+n\pi\right);\left(-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\dfrac{2\pi}{3}+n\pi\right)\quad (k,n\in\mathbb{Z})$.

1856. $\left((-1)^{k}\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\pm\dfrac{2\pi}{3}+2n\pi\right)$,

$$\left((-1)^{m+1}\frac{7\pi}{6}+m\pi,\pm\frac{\pi}{3}+2\ell\pi\right)\quad (k,n,m,\ell\in\mathbb{Z}).$$

1857. $\left(k\pi,\pm\dfrac{\pi}{3}+2n\pi\right)\quad (n,k\in\mathbb{Z})$.

1858. $\left(\dfrac{\pi}{2}(2k+1),\pm\dfrac{\pi}{3}+2n\pi\right)\quad (n,k\in\mathbb{Z})$.

1859. $\left(\dfrac{6k-1}{6},\dfrac{6k+1}{6}\right)\quad (k\in\mathbb{Z})$.

1860. $x_{1/2}=-1\pm\sqrt{2k+1}$, $x_{3/4}=1\pm\sqrt{2n+1}\quad (n,k=0,1,2,\ldots)$.

1861. $x = 2$, $x = 4$.

1862. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\sin(2\arcsin x) = \sin\arcsin 2x \iff 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) = 2x$$
$$\iff x\sqrt{1-x^2} = 1 \vee x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

1863. Neka je $\arccos x = a$, $\arcsin x = b$; tada je

$$\cos a = \sin b = x. \tag{1}$$

Data jednačina postaje

$$a - b = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos(a-b) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos a\cos b + \sin a\sin b = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ako se uzme u obzir (1) dobijamo iracionalnu jednačinu

$$x\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\iff 4x\sqrt{1-x^2} = \sqrt{3} \iff (16x^2(1-x^2) = 3 \wedge 1 - x^2 \geq 0) \iff x = 0,5.$$

1864. $x = 0 \vee x = 0,5$. **1865.** $x = \cos 4 \vee x = \cos 2$.

4.5. Trigonometrijske nejednačine

1866. $0 \leq x < \frac{\pi}{12} \vee \frac{5\pi}{12} < x \leq \pi \vee \pi \leq x < \frac{13\pi}{12} \vee \frac{17\pi}{12} < x \leq 2\pi$.

1867. $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \leq x \leq \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$.

1868. $4k\pi - \frac{4\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} + 4k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

1869. a) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{5\pi}{18} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$.
b) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{1}{6} - \frac{\pi}{12} \leq x < \frac{\pi}{12} + \frac{1}{6} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

1870. a) $2k\pi + \frac{7\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$;
b) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \leq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

1871. a) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$.
b) $\frac{k\pi}{4} + \frac{1}{8} + \frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8} + \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

1872. a) $\frac{k\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$; $\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}$.
b) $2k\pi - \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k, n \in \mathbb{Z})$.

1873. Datu nejednačinu napišimo u obliku

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) < \sqrt{2};$$

odakle je $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 1$.

Pošto je $|\cos\alpha| < 1$ za ma koje α, u datom slučaju $-1 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 1$. Iz ove nejednačine sledi da je

$$x - \frac{\pi}{4} \neq 2k\pi, \quad \text{tj.} \quad x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

1874. $2k\pi - \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (n, k \in \mathbb{Z})$.

1875. Nejednačina $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x > 1 + \operatorname{tg} x$ ekvivalentna je nejednačini

$$\operatorname{tg}^2 x(1 + \operatorname{tg} x) - (1 + \operatorname{tg} x) > 0 \quad \text{ili} \quad (1 + \operatorname{tg} x)^2 \cdot (\operatorname{tg} x - 1) > 0.$$

Pošto je $(1 + \operatorname{tg} x)^2 \geq 0$, nejednačina je zadovoljena za $\operatorname{tg} x - 1 > 0$, tj.

$$\operatorname{tg} x > 1 \iff \frac{\pi}{4}(4k+1) < x < \frac{\pi}{2}(2k+1) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

1876. Iz prve nejednačine dobija se

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Iz druge

$$2n\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Odatle sledi rešenje date nejednačine

$$\frac{\pi}{6} + 2m\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

1877. Leva strana date nejednačine može se transformisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}
&\cos^2 x\cos x\cos 3x-\sin^2 x\sin x\sin 3x\\
&\quad=\frac{1}{2}\cos^2 x(\cos 4x+\cos 2x)-\frac{1}{2}\sin^2 x(\cos 2x-\cos 4x)\\
&\quad=\frac{1}{2}\cos 4x(\cos^2 x+\sin^2 x)+\frac{1}{2}\cos 2x(\cos^2 x-\sin^2 x)\\
&\quad=\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos^2 2x=\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{4}(1+\cos 4x)=\frac{1+3\cos 4x}{4}.
\end{aligned}$$

Tada je data nejednačina ekvivalentna nejednačini

$$\frac{1+3\cos 4x}{4}>\frac{5}{8}\Longleftrightarrow \cos 4x>\frac{1}{2},$$

odakle sledi

$$\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}<x<\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\quad (k\in\mathbb{Z}).$$

1878. Pošto je

$$\begin{aligned}
\frac{\sin 2x-\cos 2x+1}{\sin 2x+\cos 2x-1}&=\frac{2\sin x\cos x+2\sin^2 x}{2\sin x\cos x-2\sin^2 x}\\
&=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}<0,
\end{aligned}$$

pri čemu je $\sin x\neq 0$, sledi da je $k\pi-\dfrac{\pi}{4}<x<k\pi$ i $n\pi<x<\dfrac{\pi}{4}+n\pi$ $(k,n\in\mathbb{Z})$.

1879. Data nejednačina ekvivalentna je nejednačini

$$2\sin x-(1-\cos 2x)>0\Longleftrightarrow 2\sin x(1-\sin x)>0\Longleftrightarrow 2\sin x-2\sin^2 x>0$$

i dakle

$$2k\pi<x<(2k+1)\pi\quad (k\in\mathbb{Z}).$$

1880. $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3\pi}{4}$; $\pi<x<\dfrac{5\pi}{4}$; $\dfrac{7\pi}{4}<x<2\pi$.

1881. $\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{4\pi}{3}<x<\dfrac{5\pi}{3}$.

1882. Data nejednačina ekvivalentna je nejednačini

$$\cos\frac{x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)<0,$$

odakle je $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$.

1883. Uočimo razliku:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-(1+\operatorname{ctg}\alpha)&=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\left(1+\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}\right)\\
&=\frac{2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1\right)^2}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}\geq 0.
\end{aligned}$$

Pošto je $0<\dfrac{\alpha}{2}<\pi$, znak jednakosti važi za $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$. Kako je

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-(1+\operatorname{ctg}\alpha)\geq 0$$

za svako $\alpha\in(0,\pi)$, tada je $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\geq 1+\operatorname{ctg}\alpha$.

1884. Razlika:

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2\alpha\cos^2\beta=-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\leq 0,$$

pri čemu znak jednakosti važi za $\sin\alpha=0$, ili $\sin\beta=0$, tj. $\alpha=k\pi$ ili $\beta=n\pi$. Dakle,

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\leq\cos^2\alpha\cos^2\beta.$$

1885. Iskoristiti identitet

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

(videti zadatak 1570). Pošto su uglovi α, β i γ oštri, tada je

$$2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma>0,$$

te je

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma>2.$$

1886. Ako je $0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$, tada je

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)>0\quad\text{ili}\quad\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}>0.$$

Odatle je $1-\operatorname{tg}\cdot\operatorname{tg}\beta>0$, tj. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta<1$.

1887. Primenom kosinusne teoreme dobija se:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)-\frac{a^2}{2bc}.$$

Pošto je $\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\geq 2$, tada je $\cos\alpha > 1-\dfrac{a^2}{2bc}$ ili $1-\cos\alpha\leq\dfrac{a^2}{2bc}$, odakle je $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\leq\dfrac{a^2}{2bc}$, ti. $\sin\dfrac{\alpha}{2}\leq\dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$. Analogno tome: $\sin\dfrac{\beta}{2}\leq\dfrac{b}{2\sqrt{ac}}$ i $\sin\dfrac{\gamma}{2}<\dfrac{c}{2\sqrt{ab}}$, odakle sledi:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\leq\frac{a}{2\sqrt{bc}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{ac}}\cdot\frac{c}{2\sqrt{ab}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{abc}{abc}=\frac{1}{8}.$$

1888. Treba transformisati postupno levu stranu

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^4\alpha}+\frac{1}{\cos^4\alpha}&=\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha}\\&=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}{\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha}=\frac{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}{\sin^4\alpha\cdot\cos^4\alpha}\\&=\frac{8(1+\cos^2 2\alpha)}{\sin^4 2\alpha}=\frac{8}{\sin^4 2\alpha}\geq 8.\end{aligned}$$

1889. Data nejednačina ekvivalentna je nejednačini $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)<0$. Njena rešenja su $2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}<x<\dfrac{7\pi}{3}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

1890. $2k\pi-\dfrac{13\pi}{12}<x<\dfrac{5\pi}{12}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

1891. $\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{48}<x<\dfrac{5\pi}{48}+\dfrac{k\pi}{2} \quad (k\in\mathbb{Z})$.

1892. Data nejednačina ekvivalentna je nejednačini

$$\cos^2 2x(2\sin 4x-1)>0,$$

odakle sledi da je

$$\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24}<x<\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2} \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

1893. Data nejednačina ekvivalentna je nejednačini

$$\begin{aligned}\cos 2x(2\sin 3x-1)<0\Longleftrightarrow &(\cos 2x>0\wedge 2\sin 3x-1<0)\\&\vee(\cos 2x<0\wedge 2\sin 3x-1>0).\end{aligned}$$

Ova disjunkcija je tačna ako i samo ako x pripada intervalima $\left[0,\dfrac{\pi}{18}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{18}\right)$, $\left(\dfrac{13\pi}{18},\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\dfrac{17\pi}{18},\dfrac{5\pi}{4}\right)$, $\left(\dfrac{25\pi}{18},\dfrac{29\pi}{18}\right)$, $\left(\dfrac{7\pi}{4},2\pi\right]$.

1894. Data nejednačina ekvivalentna je nejednačini $\sin x\sin 3x\cos 4x>0$. Rešenja: $\left(0,\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{3\pi}{8}\right)$, $\left(\dfrac{5\pi}{8},\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{7\pi}{8},\pi\right)$, $\left(\pi,\dfrac{9\pi}{8}\right)$, $\left(\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{11\pi}{8}\right)$, $\left(\dfrac{13\pi}{8},\dfrac{5\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{15\pi}{8},2\pi\right)$.

1895. Data nejednačina ekvivalentna je nejednačini

$$\left(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\leq 0\Rightarrow\quad 2k\pi+\frac{\pi}{3}\leq x\leq\frac{5\pi}{6}+2k\pi,$$
$$2n\pi+\frac{7\pi}{6}\leq x\leq\frac{5\pi}{3}+2n\pi \quad (n,k\in\mathbb{Z}).$$

1896. Ako se trinom rastavi na činioce, dobija se ekvivalentna nejednačina

$$\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\geq 0,$$
$$2k\pi+\frac{\pi}{3}\leq x\leq\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\quad 2n\pi\leq x\leq\frac{\pi}{6}+2n\pi,$$
$$2m\pi+\frac{5\pi}{6}\leq x\leq 2\pi(m+1),\quad (k,n,m\in\mathbb{Z}).$$

1897. $2k\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$, $2n\pi+\dfrac{5\pi}{6}<x<2\pi(n+1)+\dfrac{\pi}{6} \quad (k,n\in\mathbb{Z})$.

1898. $2k\pi+\dfrac{7\pi}{6}<x<2k\pi+\dfrac{11\pi}{6} \quad (k\in\mathbb{Z})$.

1899. $2k\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$, $2n\pi+\dfrac{7\pi}{6}<x<\dfrac{11\pi}{6}+2n\pi \quad (n,k\in\mathbb{Z})$.

1900. $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $\left(\dfrac{5\pi}{3},2\pi\right)$.

1901. $0<x<\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{4}<x<\dfrac{7\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{4}<x<\dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{7\pi}{4}<x<2\pi$.

1902. $k\pi+\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5\pi}{6}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

1903. $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}<x<\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}<x<\dfrac{4\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{3}<x<\dfrac{7\pi}{4}$.

1904. Funkcija je pozitivna za svako x.

1905. $y>0$ za $-\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{7\pi}{6}$; $\quad y<0$ za $\dfrac{7\pi}{6}<x<\dfrac{11\pi}{6}$.

1906. $y>0$ za $n\pi\leq x<\dfrac{\pi}{4}+n\pi$, $k\pi+\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{2}+k\pi$; $y<0$ za $n\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{3}+n\pi \quad (k,n\in\mathbb{Z})$.

1907. Primenom Ax^2+Bx+C je pozitivan za svako x, ako je tačna konjukcija $A>0\wedge B^2-4AC<0$. Za dati trinom ova konjukcija ima oblik

$$\left(\sin\alpha+\frac{1}{2}>0\right)\wedge\left((2\sin\alpha-3)^2-4\left(\sin\alpha+\frac{1}{2}\right)<0\right)$$
$$\iff\left(\sin\alpha+\frac{1}{2}>0\right)\wedge\left(4\left(\sin\alpha-\frac{7}{2}\right)\cdot\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)<0\right)$$
$$\iff\left(\sin\alpha>-\frac{1}{2}\right)\wedge\left(\sin\alpha<\frac{7}{2}\vee\sin\alpha>\frac{1}{2}\right)$$
$$\iff\left(\frac{7\pi}{6}<\alpha<\frac{11\pi}{6}\right)\wedge\left(\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{5\pi}{6}\right)\iff\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{5\pi}{6}.$$

1908. Ne postoji takva vrednost α.

1909. $\frac{\pi}{2}+2k\pi\le x\le\frac{2\pi}{3}+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$; znak jednakosti važi za

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

1910. $0<x\le 1$.

4.6. Grafici trigonometrijskih funkcija

1911. Označimo traženi period sa T[1]. Tada je potrebno da jednakost (1) bude ispunjena za svako x.

$$\sin 5(x+T)=\sin x, \tag{1}$$

odakle je

$$2\sin\frac{5T}{2}\cos\left(5x+\frac{5T}{2}\right)=0. \tag{2}$$

U jednakosti (2) x je promenljiva, a T konstanta, pa je $\cos\left(5x+\frac{5T}{5}\right)\neq 0$. Radi toga, (2) je ispunjeno za $\sin\frac{5T}{2}=0$, odakle je $T=\frac{2\pi}{5}$.

1912. Analogno prethodnom zadatku, mora da važi

$$a\sin(b(x+T)+c)=a\sin(bx+c),$$

[1] T je najmanji pozitivan broj koji važi (1) (T je (*osnovni period*).

odakle je $2a\cos\frac{2bx+2c+bT}{2}\cdot\sin\frac{bT}{2}=0$. Imamo

$$\cos\frac{2bx+2c+bT}{2}\neq 0,\quad \sin\frac{bT}{2}=0\iff T=\frac{2\pi}{b}.$$

1913. Iz jednakosti $\cos m(x+T)=\cos mx$ sledi $-2\sin\frac{2mx+mT}{2}\sin\frac{mT}{2}=0$. Pošto je $\sin\frac{2mx+mT}{2}\neq 0$, tada je $\sin\frac{mT}{2}=0\iff T=\frac{2\pi}{m}$.

1914. Primedba. Period date funkcije jednak je najmanjim zajedničkim sadržiocima pojedinih sabiraka. Ovo pravilo važi samo za zbir ili razliku pojedinih funkcija.

Funkcija $\cos\frac{3x}{2}$ ima period $\frac{4\pi}{3}$, a funkcija $\sin\frac{x}{3}$ ima period 6π. Najmanji zajednički sadržilac za brojeve $\frac{4\pi}{3}=2\cdot\frac{2\pi}{3}$ i $6\pi=9\cdot\frac{2\pi}{3}$ je broj $18\cdot\frac{2\pi}{3}=12\pi$, tj. $T=12\pi$.

1915. a) Data funkcija može se transformisati na sledeći način:

$$\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sin x\,\frac{1+\cos x}{2}=\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{8}\sin 2x.$$

Period funkcije $\frac{1}{4}\sin x$ je 2π, a funkcije $\frac{1}{8}\sin 2x$ je π. Najmanji zajednički za 2π i π je period date funkcije $T=2\pi$.

b) $T=80\pi$.

1916. a) Data funkcija se transformiše u oblik $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 6x-\cos 4x$, odakle je period $T=\pi$,

b) $T=\frac{\pi}{3}$.

1917. Stavimo $\alpha=a\sin\theta$, $\beta=a\cos\theta$. Tada je

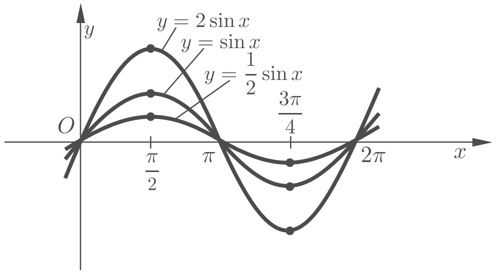
$$y=a\sin\theta\cos px+a\cos\theta\sin px=a\sin(px+\theta),$$

pri čemu je $a=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Amplituda je $a=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, a period $T=\frac{2\pi}{p}$.

1918.

$$y=(\cos^2x)^2+(\sin^2x)^2=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x\Rightarrow T=\frac{\pi}{2}.$$
$$y=\cos^6x+\sin^6x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x\Rightarrow T=\frac{\pi}{2}.$$

1919. Lako se pokazuje da je period za sve tri funkcije $T = 2\pi$. Grafik je prikazan na slici 39. Nule su: $x = 0$, $x = \pi$ i $x = 2\pi$.



Sl. 39.

Za $x = \dfrac{\pi}{2}$ imaju maksimum i to: $y_{\max} = 1$, $y_{\max} = 2$ i $y_{\max} = \dfrac{1}{2}$.

Za $x = \dfrac{3\pi}{2}$ imaju mimmum, i to: $y_{\min} = -1$, $y_{\min} = -2$. $y_{\min} = -\dfrac{1}{2}$.

Promene za sve tri funkcije u intervalu $(0, 2\pi)$ mogu se predstaviti tabelom:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	0	$\searrow$	min	$\nearrow$	0

1920. Funkcija $y = \cos x$ ima period $T = 2\pi$, nule $x = \dfrac{\pi}{2}$ i $x = \dfrac{3\pi}{2}$, $y_{\max} = 1$ za $x = 0$ i $x = 2\pi$, $y_{\min} = -1$ za $x = \pi$. Promene su date tabelom.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

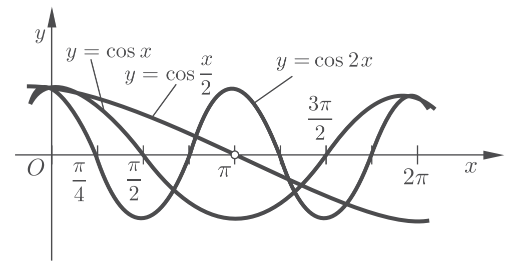
Funkcija $y = \cos\dfrac{1}{2}x$ ima period $T = 4\pi$, nule $x = \pi$, $y_{\max} = 1$ za $x = 0$, $y_{\min} = -1$ za $x = 2\pi$; promene su date tabelom

x	0		π		2π
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Funkcija $y = \cos 2x$ ima period $T = \pi$, nule $x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{3\pi}{4}$, $x = \dfrac{5\pi}{4}$ i $x = \dfrac{7\pi}{4}$; $y_{\max} = 1$.

Promene su date tabelom i slikom 40.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1



Sl. 40.

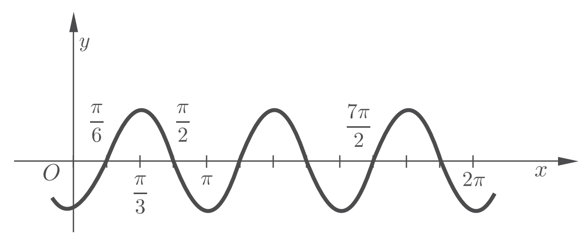
1921. Definisana $\forall x$, period $T = \dfrac{2\pi}{3}$, $y = 0$ za $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$, $y_{\max} = 1$ za $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$, $y_{\min} = -1$ za $x = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$.

Funkcija raste za: $\dfrac{2k\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$.

Funkcija opada za $\dfrac{2k\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$.

$y > 0$ za $\dfrac{2k\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2k\pi}{3}$,

$y < 0$ za $\dfrac{2k\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Grafik je prikazan na slici 41.



Sl. 41.

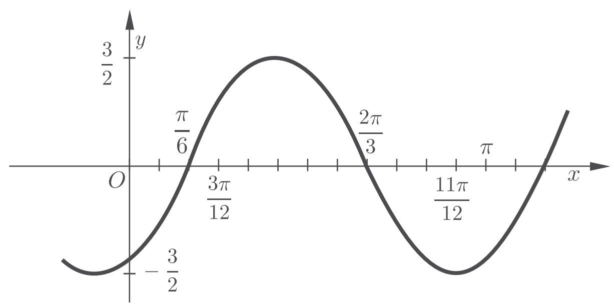
1922. Definisana $\forall x$, period $T = \pi$, nule $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}$.

$y_{\max} = \frac{3}{2}$ za $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $y_{\min} = -\frac{3}{2}$ za $x = \frac{11\pi}{12} + k\pi$.

Funkcija raste za $k\pi - \frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi$.

Funkcija opada za $k\pi + \frac{5\pi}{12} < x < \frac{11\pi}{12} + k\pi$,

$y > 0$ za $k\pi + \frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi$, $y < 0$ za $k\pi + \frac{2\pi}{3} < x < \frac{13\pi}{12} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Grafik na osnovnom periodu prikazan je na slici 42.



Sl. 42.

1923. Definisana $\forall x$, period $T = \pi$, nule $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$,

$y_{\max} = 3$ za $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$, $y_{\min} = -3$ za $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$.

Funkcija raste za $k\pi + \frac{5\pi}{8} < x < \frac{9\pi}{8} + k\pi$.

Funkcija opada za $k\pi + \frac{\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8} + k\pi$.

$y > 0$ za $k\pi + \frac{5\pi}{8} < x < \frac{9\pi}{8} + k\pi$.

$y < 0$ za $k\pi + \frac{\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Grafik je prikazan na slici 43.)

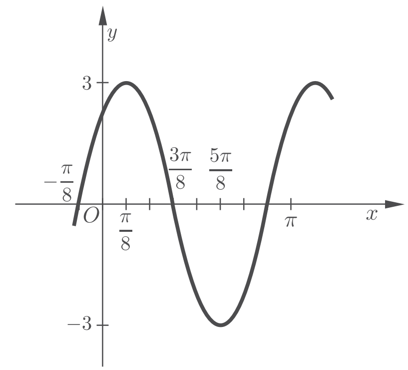
1924. Definisana $\forall x$, period $T = \pi$, nule $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$,

$y_{\max} = 2$ za $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi$, $y_{\min} = -2$ za $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$.

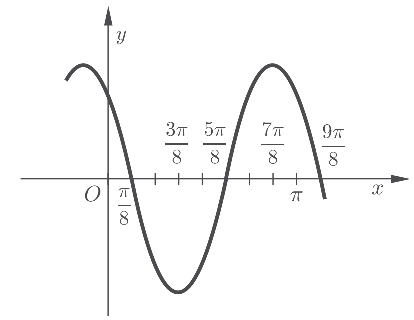
Funkcija raste za $k\pi + \frac{3\pi}{8} < x < \frac{7\pi}{8}$. Funkcija opada za $k\pi - \frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8} + k\pi$.

$y > 0$ za $k\pi + \frac{5\pi}{8} < x < \frac{9\pi}{8} + k\pi$.

$y < 0$ za $k\pi + \frac{\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Grafik je prikazan na slici 44.



Sl. 43.



Sl. 44.

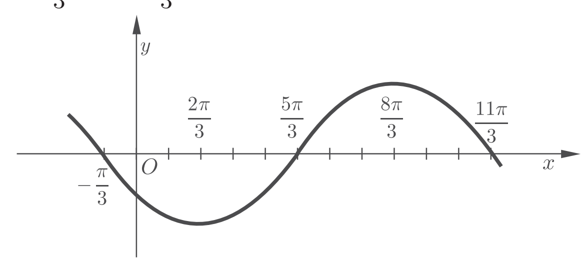
1925. Definisana $\forall x$, period $T = 4\pi$, nule $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $y_{\max} = 2$ za $x = \frac{8\pi}{3} + 4k\pi$, $y_{\min} = -2$ za $x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$.

Funkcija raste za $4k\pi + \frac{2\pi}{3} < x < \frac{8\pi}{3} + 4k\pi$.

Funkcija opada za $4k\pi + \frac{8\pi}{3} < x < \frac{14\pi}{8} + 4k\pi$,

$y > 0$ za $4k\pi + \frac{5\pi}{3} < x < \frac{11\pi}{3} + 4k\pi$,

$y < 0$ za $4k\pi - \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3} + 4k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Grafik je prikazan na slici 45.



Sl. 45.

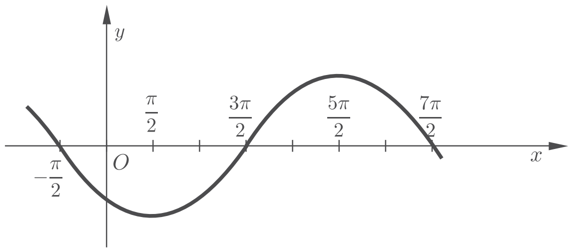
1926. Definisana $\forall x$, period $T = 4\pi$, nule $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $y_{\max} = \frac{4}{3}$ za $x = \frac{5\pi}{2} + 4k\pi$, $y_{\min} = -\frac{4}{3}$ za $x = \frac{\pi}{2} + 4k\pi$.

Funkcija raste za $4k\pi + \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2} + 4k\pi$.

Funkcija opada za $4k\pi + \frac{5\pi}{2} < x < \frac{9\pi}{2} + 4k\pi$,

$y > 0$ za $4k\pi + \frac{3\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{2} + 4k\pi$,

$y < 0$ za $4k\pi - \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} + 4k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$. Grafik je prikazan na slici 46.



Sl. 46.

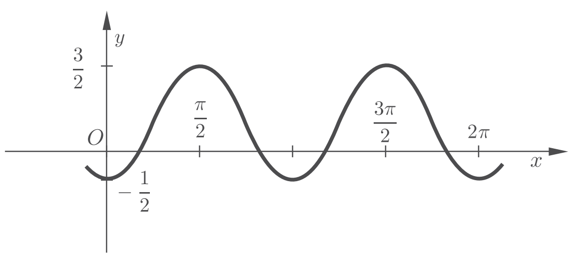
1927. Definisana $\forall x$, period $T = \pi$, nule $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, $y_{\max} = \frac{3}{2}$ za $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y_{\min} = -\frac{1}{2}$ za $x = k\pi$.

Funkcija raste za $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$. Funkcija opada za $k\pi + \frac{\pi}{2} < x < \pi + k\pi$,

$y > 0$ za $k\pi\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi$,

$y < 0$ za $k\pi - \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

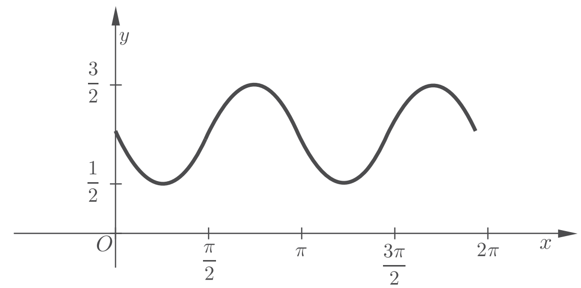
Grafik je prikazan na slici 47.



Sl. 47.

1928. Definisana $\forall x$, period $T = \pi$, nema nule.

$y_{\max} = \frac{3}{2}$ za $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $y_{\min} = \frac{1}{2}$ za $x = \frac{\pi}{4}$. Stalno je pozitivna, grafik je na slici 48.

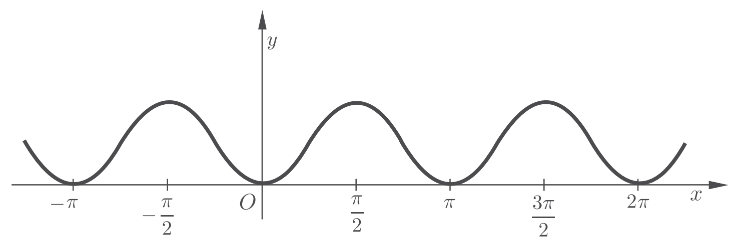


Sl. 48.

1929. Datu funkciju možemo napisati u obliku $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$.

Definisana je $\forall x$, period $T = \pi$, nule $x = k\pi$.

$y_{\max} = 1$ za $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y_{\min} = 0$ za $x = k\pi$. Grafik je prikazan na slici 49.

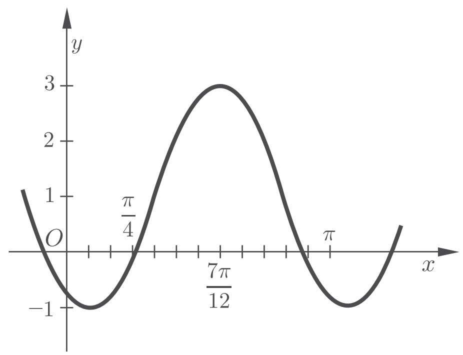


Sl. 49.

1930. Analogno prethodnom zadatku data funkcija postaje $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$.

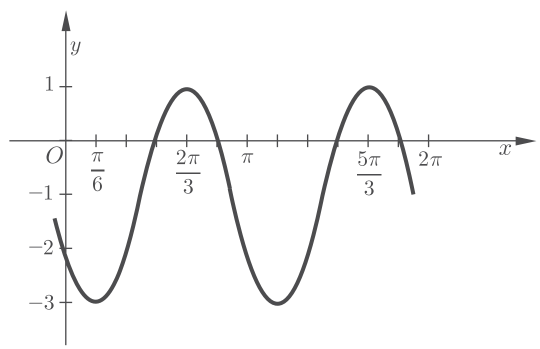
1931. Definisana $\forall x$, period $T = \pi$, nule $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $y_{\max} = 3$ za $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$, $y_{\min} = -1$ za $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$.

Grafik je na slici 50.



Sl. 50.

1932. Definisana $\forall x$, period $T=\pi$, nule $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k\pi$, $y_{\max}=1$ za $x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi$, $y_{\min}=-3$ za $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$. Grafik je na slici 51.



Sl. 51.

1933. Imamo

$$y=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

Funkcija se jednostavno ispituje.

1934. Data funkcija se transformiše u oblik

$$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x+\frac{3\pi}{4}\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{4x-\frac{3\pi}{2}}{2},$$
$$y=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right),$$

odakle se promene lako ispituju.

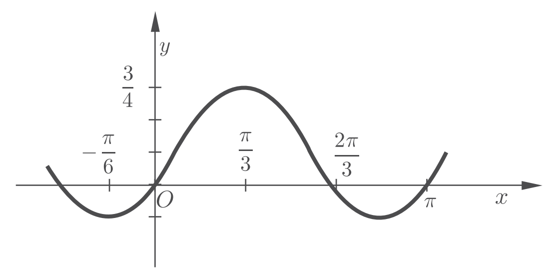
1935. Data funkcija se svodi na oblik $y=-2\sin\left(2x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

1936. Data funkcija se transformiše u oblik $y=2\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

1937. Primenom identiteta $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ data funkcija postaje

$$y=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).$$

Definisana $\forall x$, period $T=\pi$, nule $x=k\pi$ i $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $y_{\max}=\dfrac{3}{4}$ za $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $y_{\min}=-\dfrac{1}{4}$ za $x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi$.



Sl. 52.

Grafik je prikazan na slici 52.

1938. $\pi(2k+1)\le x\le\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$. **1939.** $x\in[2,\pi)\cup(\pi,4]$.

1940. Data funkcija se može napisati u obliku $y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\cos 2x$.

Odatle zaključujemo da je antidomen: $-1\le y\le 2$.

1941. Data funkcija se lako transformiše u oblik

$$y = \frac{4}{\sin^2 2\pi x} - 2,$$

odakle sledi da je antidomen funkcije $y \geq 2$.

1942. U drugoj funkciji su isključene tačke $\left(\frac{k\pi}{2}, 1\right)$ gde je $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

1943. $2k\pi - \pi < x < 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$. **1944.** $b = \frac{\pi}{2} + m\pi \ \ (m \in \mathbb{Z})$.

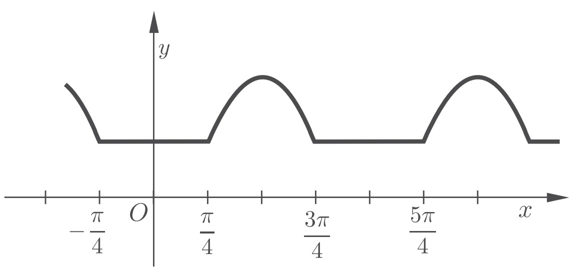
1945. Funkcija je definisana za svako x. Ako je $\cos^2 x < \frac{1}{2}$, tj. ako je

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi,$$

grafik date funkcije se poklapa sa grafikom funkcije $y = \frac{1}{2} - \cos 2x$. Ako je

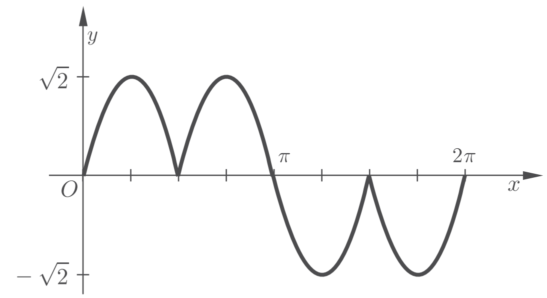
$$\cos^2 x > \frac{1}{2}, \quad \text{tj.} \quad k\pi - \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

grafik date funkcije se poklapa sa grafikom $y = \frac{1}{2}$. Grafik je prikazan na slici 53.

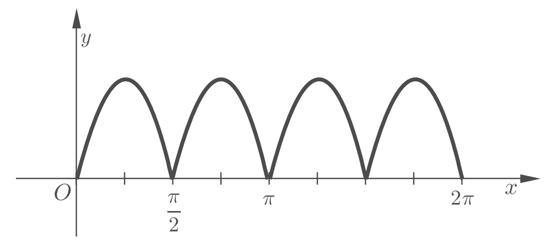


Sl. 53.

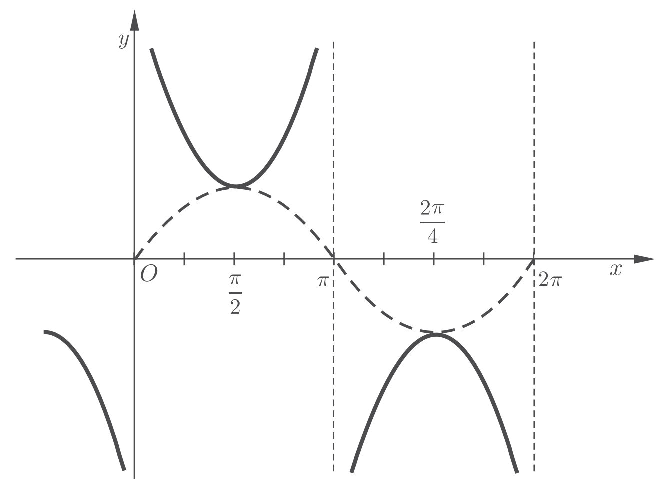
1946. Funkcija je definisana za $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i transformiše se u oblik $y = \frac{\cos x \sin 2x}{\sqrt{2}\,|\cos x|}$. Grafik date funkcije se poklapa sa grafikom funkcije $y = \sqrt{2}\sin 2x$ za $\cos x > 0$, a sa grafikom $y = -\sqrt{2}\sin 2x$, za $\cos x < 0$, (slika 54).



Sl. 54.



Sl. 55.



Sl. 56.

1947. Funkcija je definisana za $x \neq \frac{k\pi}{2}$. Ako je $\sin 2x > 0$, $y = \frac{\sin^2 2x}{\sin 2x} = \sin 2x$; ako je $\sin^2 x < 0$, $y = \frac{\sin^2 2x}{-\sin 2x} = -\sin 2x$, (slika 55).

1948. Definisano za $x \neq k\pi$, funkcija ima asimptote za $x = k\pi$. Grafik date funkcije se lako dobija, ako se konstruiše grafik funkcije $y = \sin x$, a zatim se odrede recipročne vrednosti ordinata tačaka grafika funkcije $y = \sin x$ (slika 56).

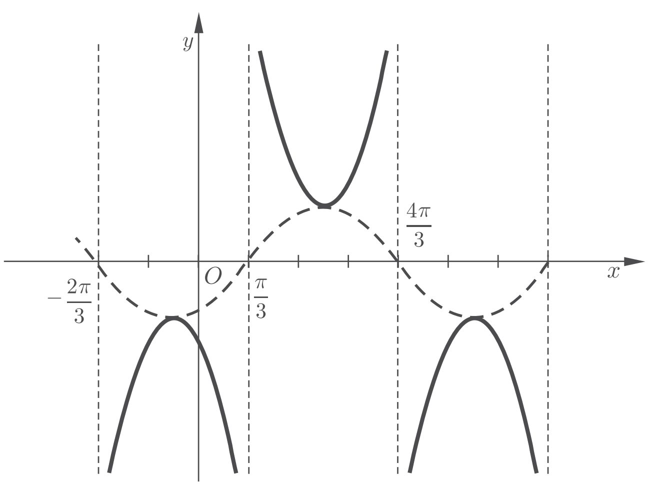
1949. Data funkcija se može napisati u obliku

$$y = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}.$$

Treba najpre konstruisati funkciju

$$y = \frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

a zatim uzeti recipročne vrednosti ordinata (slika 57).



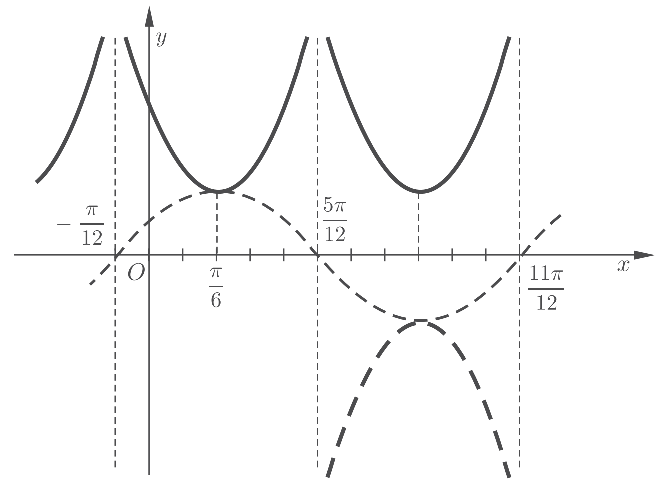
Sl. 57.

1950. Analogno prethodnom zadatku. Konstruiše se najpre funkcija

$$y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),$$

zatim funkcija $y = \left|\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$ i na kraju data funkcija

$$y = \frac{1}{\left|\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right|} \quad \text{(slika 58).}$$



Sl. 58.

1951. Po pretpostavci, za sve vrednosti x, za koje je definisana funkcija imamo

$$\frac{\sin n(x+3\pi)}{\sin \frac{5(x+3\pi)}{n}} = \frac{\sin nx}{\sin \frac{5x}{n}},$$

odakle

$$(1) \qquad (-1)^n \sin\frac{5x}{n} = \sin\frac{5x}{n}\cos\frac{15\pi}{n} + \cos\frac{15\pi}{n}.$$

Ova jednakost je identitet. Stavimo $x = 0$ i dobijamo $0 = \sin\frac{15\pi}{n}$. Tada iz (1) sledi

$$(2) \qquad (-1)^n \sin\frac{5x}{n} = \sin\frac{5x}{n}\cos\frac{15\pi}{n}.$$

Pošto je (2) tačno za svako x, to je $\cos\frac{15\pi}{n} = (-1)^n$.

Poslednja jednakost je tačna za sve cele brojeve koji se sadrže u 15. Dakle, tražene vrednosti za n su: $n = \pm 1$, $n = \pm 3$, $n = \pm 5$, $n = \pm 15$.

1952. Data funkcija može se napisati u obliku

$$y = -2(\sin x + 1)^2 + 3.$$

Odavde se dobija $y_{\min} = -5$, $y_{\max} = 3$.

1953. Data funkcija može se napisati u obliku

$$y = 2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}.$$

Odavde se dobija za $x = \frac{\pi}{2}$, $y_{\max} = 3$, a za $x = \frac{\pi}{6}$, $y_{\min} = -\frac{3}{2}$.

1954. 2; −2.

1955. Data funkcija se transformiše u oblik

$$y = 2(\cos x + 1)^2$$

odakle se izvodi traženi zaključak.

1956. Ako se data funkcija napiše u obliku

$$y = \sin\left(2x + \frac{11\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(2x - \frac{5\pi}{3}\right)\right),$$

razlika sinusa se transformiše u proizvod; funkcija postaje

$$y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

1957. Analogno prethodnom zadatku data funkcija se transformiše u oblik

$$y = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

1958. Ako se transformiše proizvod sinusa i kosinusa u zbir, data funkcija se svodi na oblik

$$y = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1.$$

Za dalje ispitivanje funkcije videti zadatak 1931 i odgovarajuću sliku.

1959. Ako se proizvod kosinusa u datoj funkciji transformiše u zbir, dobija se funkcija

$$y = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1.$$

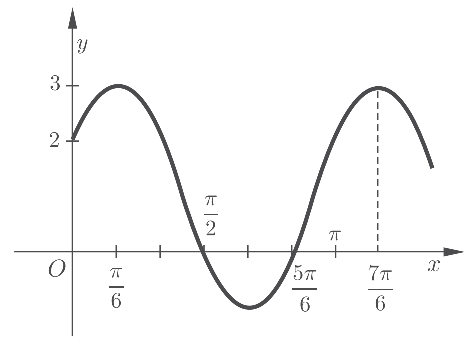
Za dalje ispitivanje funkcije, videti zadatak 1932 i odgovarajuću sliku.

1960. Ako se uvede $\sqrt{3} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$ i saberu prva dva sabirka u datoj funkciji, ona postaje $y = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$.

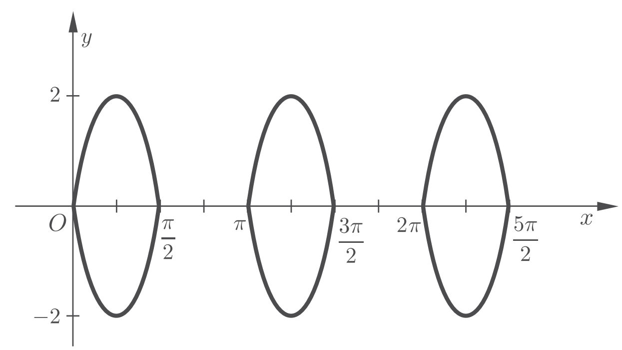
1961. Analogno prethodnom zadatku data funkcija se svodi na oblik

$$y = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1, \quad \text{itd.}$$

1962. Data funkcija se transformiše u oblik $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$, (slika 59).



Sl. 59.



Sl. 60.

1963. $y_{\max} \to +\infty$, $x \to \frac{k\pi}{2}$ $\quad (k \in \mathbb{Z})$.

$y_{\min} = 4$ za $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ $\quad (k \in \mathbb{Z})$.

1964. Koristeći se jednakošću $|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$ dobija se:

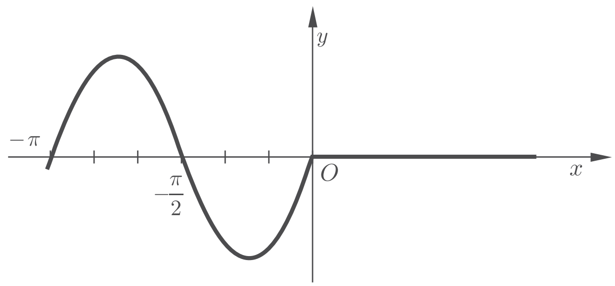
1° za $x < 0$, $y = 0$; $\quad 2^\circ$ za $x \geq 0$, $|y| = 2\sin 2x$;

3° za $x > 0 \wedge y < 0$, $y = -2\sin 2x$ (slika 60).

1965. Koristeći se jednakošću $\sqrt{x^2} = |x|$, dobija se

$$y = \sin(x - |x|) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ \sin 2x & x < 0. \end{cases}$$

Grafik je prikazan na slici 61.



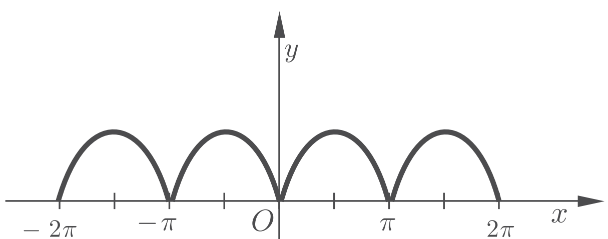
Sl. 61.

1966. $y_{\max} = 5$ za $x = 0$; $y_{\min} = \dfrac{11}{4}$ za $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

1967. $a = b = 2 - \sqrt{2}$, $c = \sqrt{2} - 2$, $y_{\max} = \sqrt{2}$ za $x = -\dfrac{\pi}{4}$.

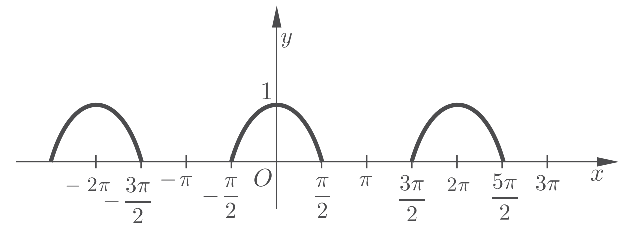
$y_{\min} = 4 - 3\sqrt{2}$ za $x = -\dfrac{5\pi}{4}$.

1968. $f_{\max} = 0,5$ za $x = \dfrac{\pi}{2}$. **1969.** Grafik je prikazan na slici 62.



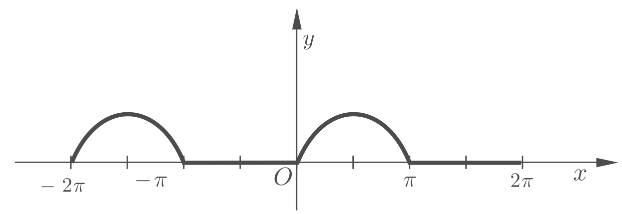
Sl. 62.

1970. Grafik je prikazan na slici 63.



Sl. 63.

1971. Grafik je prikazan na slici 64.



Sl. 64.

4.7. Sinusna i kosinusna teorema sa primenama

1972. Ugao $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 78^\circ 44' = 101^\circ 16'$, tj. $\gamma = 101^\circ 16'$. Polazeći od sinusne teorem $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ dobijamo da važe sledeće implikacije:

$$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} \Rightarrow a = \frac{32,54 \cdot \sin 43^\circ 28'}{\sin 101^\circ 16'} = 22,83 \text{ cm}.$$

Slično nalazimo

$$b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma} \Rightarrow b = \frac{32,54 \cdot \sin 35^\circ 16'}{\sin 101^\circ 16'} = 19,16 \text{ cm}.$$

1973. Iz sinusne teoreme nalazimo da je

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = \frac{20,54\sin 63^\circ 47'}{23,42} \Rightarrow \sin\beta = 0,7577,$$

odakle je $\beta = 49^\circ 16' \vee \beta = 130^\circ 44'$.

Pošto je u drugom slučaju $\alpha + \beta > 180^\circ$, taj slučaj otpada. Dalje je

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 66^\circ 57',$$

a zatim iz sinusne teoreme nalazimo $c = 24,94$ cm.

1974. Iz sinusne teoreme nalazimo da je

$$\sin\gamma = \frac{c\sin\alpha}{a} = 0,8936 \Rightarrow \gamma = 63^\circ 20'.$$

Dalje nalazimo da je $\beta = 73^\circ 40'$ i $b = 26,44$ cm.

1975. Iz sinusne teoreme imamo $\sin\alpha = \dfrac{a\sin\gamma}{c}$, odakle sledi:

$$\sin\alpha = 0,6698 \Rightarrow \alpha_1 = 42^\circ 3 \vee \alpha_2 = 180^\circ - 42^\circ 3' = 137^\circ 57'.$$

Dalje nalazimo $\beta_1, = 114^\circ 31' \vee \beta_2 = 18^\circ 37'$; $b_1 = 43,47$ cm, $b^2 = 15,25$ cm.

1976. Iz kosinusne teoreme nalazimo $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, odakle je

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} \Rightarrow c = \sqrt{365 - 364\cos 67^\circ 23'} = 15.$$

Iz obrasca

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

dobijamo $\cos\alpha = 0,6$, pa je $\alpha = 53^\circ 8'$, a iz obrasca $| < \cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ sledi $\cos\beta = \dfrac{33}{65}$, pa je $\beta = 59^\circ 29'$.

1977. $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0,12500 \Rightarrow \alpha = 82^\circ 49$;

$\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 0,75000 \Rightarrow \beta = 41^\circ 25'$;

$\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 0,56250 \Rightarrow \gamma = 55^\circ 46'$.

1978. $a = 28,51$ cm, $b = 25,56$ cm.

1979. $b_1 = 89,53$ cm, $b_2 = 23,13$ cm; $\alpha_1 = 63^\circ 8' \vee \alpha_2 = 116^\circ 52'$.

1980. $a = 17,84$ cm, $b = 21,57$ cm i $c = 22,25$ cm.

1981. $\alpha = 82^\circ 49'$, $\beta = 41^\circ 25'$. **1982.** $b = 5,08$ cm, $\gamma = 78^\circ 25'$.

1983. $\alpha = 73^\circ 31'$, $\beta = 27^\circ 6'$. **1984.** $c = 4,58$ cm, $\alpha = 49^\circ 6'$.

1985. $c = 2\sqrt{3}$, $b = 3 + \sqrt{3}$. **1986.** $a = 4\sqrt{3}$, $b = 6\sqrt{2}$, $c = 2(3 + \sqrt{3})$.

1987. Pošto je

$$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6}),$$

imamo

$$b^2 = 12 + 6\sqrt{3} = (3 + \sqrt{3})^2 \Longleftrightarrow b = 3 + \sqrt{3}.$$

1988. $BC = 21$ cm, $R = 7\sqrt{3}$ cm. **1989.** $a = 8$ cm, $b = 5$ cm i $c = 7$ cm.

1990. $a = 8$ cm, $b = 3$ cm. **1991.** $\dfrac{7}{\sqrt{3}}$ cm.

1992. Za svaki trougao važi kosinusna teorema, pa je

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \wedge b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

Kako je $a\cos\beta = b\cos\alpha$, imamo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \wedge b^2 = a^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$\Longleftrightarrow a^2 - b^2 = b^2 - a^2 \Longleftrightarrow 2a^2 = 2b^2 \Longleftrightarrow a = b.$$

Dakle, trougao za koji važi data jednakost je jednakokraki.

1993. Iz konjunkcije

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \wedge \frac{a - b}{a} = 1 - 2\cos\gamma$$

sledi $a = c$.

1994. Jednakost $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ se svodi na $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \Rightarrow \alpha = \beta$.

1995. $a = 6$ cm, $b = 4$ cm. **1996.** $a = 2$, $b = 1 + \sqrt{3}$, $\beta = 75^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

1997. $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 75^\circ$, $R = 2$.

1998. Iz formule $\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \sin^2\gamma}$ dobijamo $\cos\gamma = \pm\dfrac{1}{7}$. Za $\cos\gamma = \dfrac{1}{7}$ primenom kosinusne teoreme nalazimo jedno rešenje, $a = 5$, $b = 7$ i $c = 8$.

1999. Stranice su 3, 5 i 7.

2000. a) Ako uporedimo datu jednakost sa kosinusnom teoremom, nalazimo da je

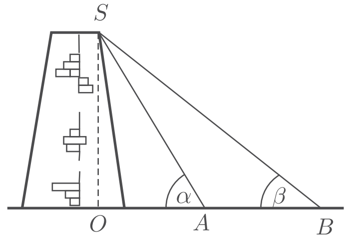
$$a^2 = b^2 + c^2 + bc\sqrt{3} \wedge a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$2\cos\alpha = -\sqrt{3} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 150^\circ.$$

Sličnim postupkom dobijamo: b) $\alpha = 60^\circ$; c) $\alpha = 45^\circ$; d) $\alpha = 30^\circ$.

2001. U horizontalnoj ravni izaberemo dve tačke A i B, čije je rastojanje $AB = a$, tako da se iz tačaka A i B vidi vrh dimnjaka (slika 65). U tačkama A i B izmere se uglovi $\sphericalangle SAO = \alpha$, $\sphericalangle SBO = \beta$ pod kojima se vidi vrh dimnjaka. Tada iz trougla ABS primenom sinusne teoreme nalazimo

$$AS = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}.$$



Sl. 65.

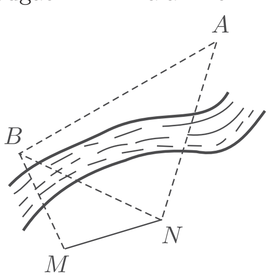
Zatim iz pravouglog trougla AOS nalazimo visinu dimnjaka

$$OS = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

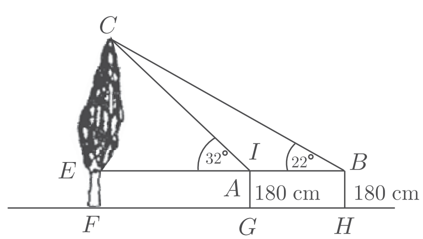
2002. Treba izabrati dve tačke M i N i izmeriti njihovo rastojanje $MN = a$, zatim izmeriti uglove $\sphericalangle BMA = \alpha$, $\sphericalangle AMN = \beta$ i $\sphericalangle ANB = \gamma$ (slika 66). Tada iz trougla MNB primenom sinusne teoreme dobijamo

$$NB = \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Slično, iz trougla AMN je $NA = \dfrac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$, dok primenom kosinusne teoreme na trougao ABN nalazimo $AB = \sqrt{NA^2 + NB^2 - 2NA\cdot NB\cos\delta}$.



Sl. 66.



Sl. 67.

2003. $P = 715{,}87$ N (primeniti kosinusnu teoremu $650^2 = P^2 + P^2 - 2P^2\cos 54^\circ$).

2004. $R = 30{,}2$ N, $\beta = 14^\circ 48'$. **2005.** $P = 5{,}4$ cm^2.

2006. Iz kosinusne teoreme sledi

$$AB^2 = 8^2 + 5^2 - 2\cdot 8\cdot 5\cos 60^\circ = 64 + 25 - 40 = 49 \Rightarrow AB = 7.$$

Dakle, dužina tunela između mesta A i B iznosi 7 km.

2007. Iz trougla ABC (slika 67), primenom sinusne teoreme imamo:

$$\frac{AC}{\sin 22^\circ} = \frac{25}{\sin 10^\circ} \Rightarrow AC = 53{,}93 \text{ m}.$$

Iz pravouglog trougla EAC nalazimo

$$EC = 53{,}93\sin 32^\circ \approx 28{,}58 \text{ m}.$$

Visina drveta je približno $h = 28{,}58 + 1{,}80 = 30{,}38$ m, a širina reke na ovom mestu $FG \approx 45{,}74$ m.

2008. Primenom kosinusne teoreme dobija se $F_1 = 5$ N, $F_2 = 8$ N.

2009. Ako su a i b stranice, d_1 i d_2 dijagonale, α i $(180^\circ - \alpha)$ dva uzastopna ugla paralelograma, primenom kosinusne teoreme dobijamo:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha, \tag{1}$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha). \tag{2}$$

Zbir (1) i (2) daje $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.

2010. Ako se primene poznati obrasci za površinu trougla dobijamo $\dfrac{ch_c}{2} = \dfrac{abc}{4R}$. Odavde sledi da je $ab = 12$. Iz sistema $a - b = 1 \wedge ab = 12$ dobija se da je $a = 4$, $b = 3$.

Ako se iskoristi sinusna teorema $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

2011. $a = 3$, $b = 6$, $c = 3\sqrt{3}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $R = 3$, $P = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

2012. Prema sinusnoj teoremi data jednakost postaje $2\cos\beta = \dfrac{a}{c}$.

Zamenom u kosinusnoj teoremi

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \quad b^2 = c^2 \Longleftrightarrow b = c.$$

2013. Primeniti sinusnu teoremu i obrazac za površinu trougla $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

2014. Pošto su naspramni uglovi tetivnog četvorougla suplementni, njegova površina može se izračunati kao zbir površina dva trougla, tj.

$$P=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}cd\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin\alpha.$$

2015. Primenom kosinusne teoreme imamo

$$a^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2-2\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\cos(180^\circ-\alpha),\tag{1}$$

$$b^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2-2\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\cos\alpha,\tag{2}$$

Razlika (1) i (2) daje

$$a^2-b^2=d_1d_2\cos\alpha.\tag{3}$$

S druge strane, površina paralelograma je

$$P=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha.\tag{4}$$

Iz (3) i (4) dobijamo $P=\frac{1}{2}(a^2-b^2)\operatorname{tg}\alpha$.

2016. Ako se iskoristi kosinusna teorema $\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ i da je

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}&=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\\&=\sqrt{\frac{(a+c-b)\cdot(a+b-c)}{(a+b+c)\cdot(a+c-b)}}=\sqrt{\frac{(s-b)\cdot(s-c)}{s\cdot(s-a)}},\end{aligned}$$

tvrđenje je dokazano, gde je $2s=a+b+c$. Analogno se dokazuju i druga dva obrasca.

2017. Imamo $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{151\cdot113}{586\cdot322}}\Rightarrow\alpha=33^\circ28'$.

Analogno se dobija $\beta=65^\circ20'$ i $\gamma=81^\circ12'$.

2018. a) Neka je $AM=t_a$ težišna duž konstruisana iz temena A (slika 68). Tačka N je centralno simetrična tački A sa centrom simetrije u M. Iz trougla ABN primenom kosinusne teoreme imamo

$$(2t_a)^2=c^2+b^2-2bc\cos(180^\circ-\alpha),$$

tj.

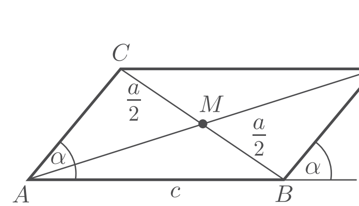
$$(2t_a)^2=c^2+b^2+2bc\cos\alpha.\tag{1}$$

Ako primenimo kosinusnu teoremu na trougao ABC imamo

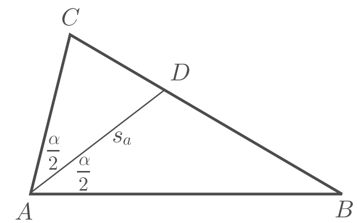
$$2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2.\tag{2}$$

Iz (1) i (2) sledi obrazac $t_a^2=\dfrac{1}{2}\left(b^2-c^2-\dfrac{a^2}{2}\right)$. Analogno se dokazuju druga dva obrasca.

b) $t_a=\sqrt{7}$, $t_b=3,5$, $t_c=0,5\sqrt{37}$.



Sl. 68.



Sl. 69.

2019. a) Neka je $AD=s_a$ dužina simetrale unutrašnjeg ugla (slika **??**). Kako je površina trougla ABC

$$P_{ABC}=P_{ABD}+P_{ADC},\tag{1}$$

gde je $P_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$, $\quad P_{ABD}=cs_a\sin\frac{\alpha}{2}$, $\quad P_{ABC}=\frac{1}{2}bs_a\sin\frac{\alpha}{2}$.

Zamenom u (1) dobija se $s_a=\dfrac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$.

Koristeći jednakosti $b=\dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$, $\quad c=\dfrac{a\sin\gamma}{2}$, koje slede iz sinusne teoreme, kao i daljim transformacijama, dobijamo $s_a=\dfrac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$.

Analogno se dobijaju i druga dva obrasca.

b) $\alpha=45^\circ$, $a=5(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $c=5(3-\sqrt{3})$, $s_a=\dfrac{10\sqrt{3}}{\sqrt{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}}$.

2020. Primeniti obrasce iz prethodnog zadatka. $s_a = 32,75$ m.

2021. $a = 8$, $b = 8\sqrt{3}$, $c = 16$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 90^\circ$.

2022. $a = 5$, $b = 3$, $d = 2(\sqrt{3} - 1)$, $c = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$.

2023. $a = 4$, $b = c = d = 2$. **2024.** $BD = \sqrt{3}$, $CD = 2$.

2025. Ako je $p = 1$, trougao je jednakostraničan. Ako je $p \neq 1$ $(p > 0)$, onda je stranica a srednja po veličini. Primenom kosinusne teoreme

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

zamena iz datih izraza za a, b, c dobijamo $\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

2026. Iz jednakosti

$$(b + c + a) \cdot (b + c - a) = 3bc \Longleftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc,$$

upoređivanjem sa $a^2 = b^2 + c^2 - 2b\cos\alpha$ (kosinusna teorema) dobija se

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

2027. Iz date jednakosti, sinusne i kosinusne teoreme izlazi da je

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = 45^\circ.$$

2028. 6, 10, 14.

2029. $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $O = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}$. Zadatak ima još jedno rešenje, $\gamma = 120^\circ$.

2030. Pošto je $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$, primenom kosinusne teoreme

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{6},$$
$$\alpha = 45^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad P = 3 + \sqrt{3}, \quad O = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}.$$

2031. Iz obrasca $P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, zamenom datih vrednosti dobija se $bc = 12$. Iz sistema

$$bc = 12 \wedge b + c = 7 \Rightarrow (b_1 = 3,\ c_1 = 4) \vee (b_2 = 4,\ c_2 = 3),$$

a iz kosinusne teoreme sledi da je $a = \sqrt{13}$.

2032. $(b_1 = 5,\ c_1 = 4) \vee (b_2 = 4,\ c_2 = 5)$, $P = 5\sqrt{3}$.

2033. $a_1 = 4$, $b_1 = 3$, $\alpha_1 = 73^\circ 54'$, $\beta_1 = 46^\circ 6'$, $P_1 = 3\sqrt{3}$, $O_2 = 3$, $b_2 = 4$, itd.

2034. $a_1 = 5$, $c_1 = 3$, $b_1 = \sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$; $a_2 = 3$, $c_2 = 5$, $b_2 = \sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$.

2035. $\gamma = 60^\circ$ $R = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

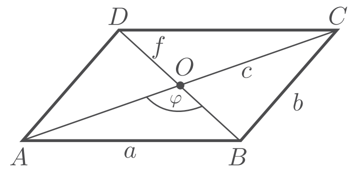
2036. Za uglove na stranici BC, iz proporcije $\varphi_1 : \varphi_2 = 17 : 19$, dobija se $\varphi_1 = 85^\circ$, $\varphi_2 = 95^\circ$. Zatim, imamo $\alpha = 86^\circ$, $\gamma = 52^\circ$. Stranice su $a = 9,423$, $b = 6,321$, $c = 7,444$.

2037. Kako je $b = 3c$, eliminacijom α iz jednačine $P = \frac{bc}{a}\sin\alpha$ i

$a^2+b^2+c^2-2bc\cos\alpha \quad (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1)$,

dobijamo bikvadratnu jednačinu

$$64c^4 - 20a^2c^2 + a^4 + 16P^2 = 0.$$



Sl. 70.

Zadatak je moguć za $P \leq \frac{3a^2}{16}$. Ima dva rešenja

$$c = \sqrt{\frac{5a^2 \pm \sqrt{9a^4 - 256P^2}}{32}}.$$

Zadatak je moguć za $P \leq \frac{3a^2}{16}$. Ima dva rešenja $c = \sqrt{\frac{5a^2 \pm \sqrt{9a^4 - 256P^2}}{32}}$.

2038. Neka je $AB = DC = a$, $BC = AD = b$, $AC = e$, $BD = f$, a O presek dijagonala, i ugao $AOB = \varphi$ (slika **??**). Primenom kosinusne teoreme na trouglove ABO i BCO dobija se:

$$a^2 = \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} - \frac{ef}{2}\cos\varphi, \tag{1}$$

$$b^2 = \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} + \frac{ef}{2}\cos\varphi, \tag{2}$$

jer je $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$. Oduzimanjem (1) i (2) imamo

$$a^2 - b^2 = -ef\cos\varphi < ef,$$

jer je $\cos\varphi < 1$, za svako $0 < \varphi < \pi$.

2039. Visina koja odgovara stranici C u trouglu ABC jednaka je $\frac{c\sqrt{3}}{2}$, pa je površina trougla ABC jednaka

$$P = \frac{bc\sqrt{3}}{4}. \tag{1}$$

Osim toga po kosinusnoj teoremi je

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\sphericalangle A) = b^2 + c^2 - bc, \quad \text{ili}$$
$$a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = bc.$$

Zamenom u (1) dobija se

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - (b-c)^2),$$

čime je dokaz završen.

2040. 30° i 150°. 75° i 15°.

V GLAVA

5. RAZNI ZADACI

2042. a) Teme T parabole ima koordinate $T\ (\cos\alpha,\ \sin^2\alpha - \sin\alpha)$. Iz pretpostavke proizlazi

$$\sin^2\alpha - \sin\alpha = 0 \iff \alpha = 0 \vee \alpha = \frac{\pi}{2},$$

za $\alpha = 0 \iff y = x^2 - 2x + 1$, za $\alpha = \frac{\pi}{2} \iff y = x^2$;

b) $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

c) ako eliminišemo α iz sistema

$$x_1 + x_2 = 2\cos\alpha \wedge x_1 \cdot x_1 = 1 - \sin\alpha$$

dobijamo traženu vezu $(x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2(x_1x_2 - 2) = 0$.

2043. $-2 < m < 0$.

2045. Trinom $Ax^2 + Bx + C$ pozitivan je za svako x ako je tačna konjunkcija $A > 0 \wedge B^2 - 4AC < 0$. Za dati trinom ova konjunkcija ima oblik

$$\begin{aligned}
&\left(\sin\alpha + \frac{1}{2} > 0\right) \wedge \left((2\sin\alpha - 3)^2 - 4\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\right)\right) < 0 \\
&\quad\iff \left(\sin\alpha + \frac{1}{2} > 0\right) \wedge 4\left(\sin\alpha - \frac{7}{2}\right) \cdot \left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\right) < 0 \\
&\quad\iff \left(\sin\alpha > -\frac{1}{2}\right) \wedge \left(\sin\alpha < \frac{7}{2} \vee \sin\alpha > \frac{1}{2}\right) \\
&\quad\iff \left(\left(0 < \alpha < \frac{7}{6}\right) \vee \left(\frac{11\pi}{6} < \alpha < 2\pi\right)\right) \wedge \left(\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5}{6}\pi\right) \\
&\quad\iff \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5}{6}\pi.
\end{aligned}$$

2047. a) Teme datog skupa funkcija u funkciji parametra k je $T(k, k^2 - 1)$. Eliminacijom k iz $X = k$ i $Y = k^2 - 1$ dobijamo $Y = X^2 - 1$, pa je traženo geometrijsko mesto minimuma parabola $Y = X^2 - 1$.

b) Za $k = -1$, $k = 1$ funkcije datog skupa imaju dvostruke nule, a za $-1 < k < 1$ dve realne različite nule.